

2. ELEMENTY TEORII PRĘTÓW SILNIE ZAKRZYWIONYCH

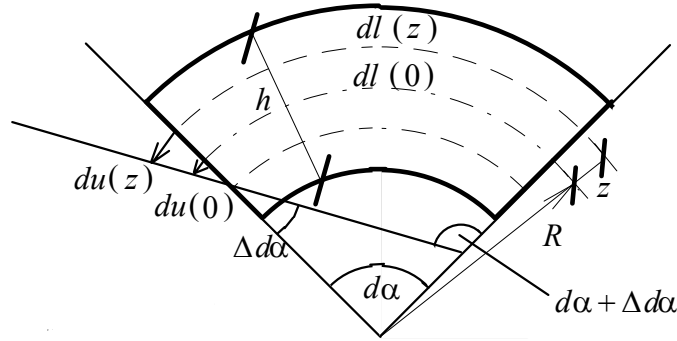
(Opracowano na podstawie [9, 11, 13, 34, 51])

2.1. Przeszyczenia i odkształcenia osiowe

Przez pręty silnie zakrzywione rozumie się takie, dla których nie można przyjąć, że proporcja pomiędzy poprzecznym wymiarem przekroju pręta h a promieniem krzywizny R jest pomijalnie mała. W praktyce jako graniczną wartość można przyjąć $h/R = 0,2$ (por. [11, 13]).

Badania doświadczalne [9] oraz rozważania teorii sprężystości [51] wykazały, że także dla prętów silnie zakrzywionych słuszna jest hipoteza płaskich przekrojów Bernoulliego. W związku z tym rozkład przemieszczeń obwodowych u na wysokości przekroju można przyjąć jako liniowy.

Rozważmy wycinek pręta silnie zakrzywionego o promieniu krzywizny początkowej R , długości osi środkowej $dl(0)$ i początkowym kącie rozwarcia $d\alpha$ przedstawiony na Rys. 2.1.



Rys. 2.1

Przemieszczenie osiowe włókna leżącego w odległości z od osi środkowej wynosi:

$$du(z) = du(0) + z\Delta d\phi.$$

Uogólnione odkształcenie liniowe tego włókna:

$$\varepsilon(z) = \frac{du(z)}{dl(z)} = \frac{du(0) + z\Delta d\alpha}{(R+z)d\alpha} = \frac{1}{R+z} \left(R \frac{du(0)}{Rd\phi} + z \frac{R\Delta d\phi}{Rd\phi} \right).$$

Jeżeli wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$\frac{\Delta d\phi}{Rd\phi} = \eta \quad - \text{względny przyrost kąta obrotu przekroju,}$$

$$\frac{du(0)}{dl(0)} = \lambda \quad - \text{względne wydłużenie osi środkowej,}$$

$$Rd\phi = dl(0) \quad - \text{długość włókna środkowego,}$$

to odkształcenie $\varepsilon(z)$ można przedstawić w postaci:

$$\varepsilon(z) = \lambda + (R\eta - \lambda) \frac{z}{z + R} \quad (2.1)$$

Zmianę krzywizny wycinka można wyrazić jako różnicę krzywizny końcowej i krzywizny początkowej:

$$\kappa = \frac{1}{R_k} - \frac{1}{R}.$$

Końcowy promień krzywizny wynosi:

$$R_k = \frac{dl(0) + du(0)}{d\varphi + \Delta d\varphi} = \frac{dl(0) \cdot (1 + \lambda)}{d\varphi \cdot (1 + R\eta)} = R \frac{1 + \lambda}{1 + R\eta},$$

co prowadzi do wyrażenia zmiany krzywizny κ w postaci:

$$\kappa = \frac{1}{R} \left(\frac{1 + R\eta}{1 + \lambda} - 1 \right) = \frac{1}{R} \frac{R\eta - \lambda}{1 + \lambda}.$$

Dla małych odkształceń można przyjąć: $1 + \lambda \approx 1$ i ostatecznie:

$$\kappa = \frac{1}{R} (R\eta - \lambda) \quad (2.2)$$

Podstawienie (2.2) do (2.1) daje końcową postać wyrażenia na odkształcenie osiowe w przecie z dużą krzywizną określone przez uogólnione odkształcenia λ oraz κ :

$$\varepsilon(z) = \lambda + \kappa \frac{zR}{z + R} \quad (2.3)$$

2.2. Naprężenia normalne

Rozkład odkształceń na wysokości przekroju pomimo zachowania hipotezy płaskich przekrojów jest nieliniowy. Pominięcie wpływu dużej krzywizny w (2.3), co jest równoważne przyjęciu $z/R = 0$, daje znaną postać liniowej zależności odkształcenia ε od współrzędnej z .

Jeżeli przyjmie się, że materiał pręta jest liniowo sprężysty, to naprężenia normalne można wyrazić przez uogólnione odkształcenia korzystając z prawa Hooke'a:

$$\sigma(z) = E \cdot \varepsilon(z) = E\lambda + E\kappa \frac{zR}{z + R} \quad (2.4)$$

gdzie: E – moduł Younga.

Korzystając z definicji sił wewnętrznych – sił normalnych N oraz momentu zginającego M :

$$N = \int_A \sigma(z) dA, \quad M = \int_A \sigma(z) z dA,$$

gdzie A – pole powierzchni przekroju pręta,
można znaleźć:

$$M = EI^* \kappa$$

oraz

$$N = EA\lambda - \frac{EI^*}{R} \kappa.$$

We wzorach określających moment zginający M i siłę normalną N występuje wielkość I^* . Jest to zmodyfikowany moment bezwładności przekroju definiowany jako:

$$I^* = \int_A \frac{Rz^2}{z+R} dA \quad (2.5)$$

Przy pominięciu wpływu dużej krzywizny ($z/R \approx 0$) wartość zmodyfikowanego momentu bezwładności pokrywa się z wartością momentu bezwładności przekroju I . W przypadku dużej krzywizny $I^* > I$. Dla przekroju prostokątnego o wysokości h otrzymuje się:

$$I^* = \mu I,$$

gdzie:

$$\mu = 12 \left[\left(\frac{R}{h} \right)^3 \cdot \ln \left(\frac{2R+h}{2R-h} \right) - \left(\frac{R}{h} \right)^2 \right].$$

Zmianę krzywizny oraz względne wydłużenie można więc wyrazić przez uogólnione siły przekrojowe N oraz M :

$$\kappa = \frac{M}{EI^*}$$

oraz

$$\lambda = \frac{N}{EA} + \frac{M}{EAR}.$$

Po podstawieniu otrzymanych w ten sposób wartości zmiany krzywizny i względnego wydłużenia do (2.3) i (2.4) można wyrazić odkształcenia i naprężenia osiowe poprzez uogólnione siły N oraz M :

$$\sigma(z) = \frac{N}{A} + \frac{M}{AR} + \frac{M}{I^*} \cdot \frac{zR}{z+R} \quad (2.6)$$

$$\varepsilon(z) = \frac{N}{EA} + \frac{M}{EAR} + \frac{M}{EI^*} \cdot \frac{zR}{z+R} \quad (2.7)$$

Wzór (2.6) wskazuje, że w stanie czystego zginania pręta o dużej krzywiznie następuje przesunięcie osi obojętnej przekroju w kierunku środka krzywizny pręta.

2.3. Naprężenia styczne i odkształcenia poprzeczne

Dla prętów o dużej krzywiznie można przyjąć taki sam rozkład naprężeń stycznych i odkształceń postaciowych jak dla prętów prostoliniowych (por. [9, 50]).

Związek między uśrednioną wartością kąta odkształcenia postaciowego γ a siłą poprzeczną T ma postać:

$$\gamma = \frac{\bar{\kappa} T}{GA} \quad (2.8)$$

gdzie: G – moduł ścinania,

$\bar{\kappa}$ – współczynnik korekcyjny ścinania.

2.4. Energia sprężysta pręta o dużej krzywiznie

Całkowita energia sprężysta pręta składa się z części związanej z pracą naprężeń osiowych oraz naprężeń stycznych (lub siły poprzecznej):

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma(z) \varepsilon(z) dV + \frac{1}{2} \int_l T \gamma dl = U_\sigma + U_\tau \quad (2.9)$$

Pierwszą całkę można doprowadzić do postaci zawierającej uogólnione siły N i M oraz uogólnione odkształcenia λ i κ (lub η).

$$U_\sigma = \frac{1}{2} \int_V \sigma \varepsilon dV = \frac{1}{2} \int_l \left(\int_A \sigma \varepsilon dA \right) d\bar{l} ,$$

gdzie:

$$d\bar{l} = (R + z) d\alpha = \left(1 + \frac{z}{R} \right) dl .$$

W tym wyrażeniu dl oznacza przyrost długości wzdłuż osi środkowej pręta. Stąd:

$$U_\sigma = \frac{1}{2} \int_l \int_A \sigma \varepsilon dA dl + \frac{1}{2} \int_l \int_A \sigma \varepsilon \frac{z}{R} dA dl .$$

Podstawia się teraz wzór (2.3) co daje:

$$U_\sigma = \frac{1}{2} \int_l \int_A \sigma \lambda dA dl + \frac{1}{2} \int_l \int_A \sigma \kappa \frac{zR}{z+R} dA dl + \frac{1}{2} \int_l \int_A \sigma \varepsilon \frac{z}{R} dA dl .$$

W pierwszej całce : $\int_A \sigma dA = N$; w drugiej: $\frac{zR}{z+R} = z - \frac{z^2}{z+R}$ i stąd:

$$U_\sigma = \frac{1}{2} \int_l N \lambda dl + \frac{1}{2} \int_l \int_A \sigma \kappa z dA dl - \frac{1}{2} \int_l \int_A \sigma \kappa \frac{z^2}{z+R} dA dl + \frac{1}{2} \int_l \int_A \sigma \varepsilon \frac{z}{R} dA dl .$$

Do drugiej całki podstawia się teraz wzór (2.2):

$$U_\sigma = \frac{1}{2} \int_l N \lambda dl + \frac{1}{2} \int_l \int_A \sigma \eta z dA dl - \frac{1}{2} \int_l \int_A \sigma \lambda \frac{z}{R} dA dl - \frac{1}{2} \int_l \int_A \sigma \kappa \frac{z^2}{z+R} dA dl + \frac{1}{2} \int_l \int_A \sigma \varepsilon \frac{z}{R} dA dl .$$

W drugiej całce: $\int_A \sigma z dA = M$, a trzecią i czwartą można połączyć:

$$U_\sigma = \frac{1}{2} \int_l N \lambda dl + \frac{1}{2} \int_l M \eta dl - \frac{1}{2} \int_l \int_A \sigma \frac{z}{R} \left(\lambda + \kappa \frac{Rz^2}{z(z+R)} \right) dA dl + \frac{1}{2} \int_l \int_A \sigma \varepsilon \frac{z}{R} dA dl .$$

Wyrażenie w nawiasie w trzeciej całce przedstawia odkształcenie ε , całki trzecia i czwarta upraszczają się i ostatecznie otrzymuje się:

$$U_\sigma = \frac{1}{2} \int_l N \lambda dl + \frac{1}{2} \int_l M \eta dl \quad (2.10)$$

Wzór ten można zinterpretować następująco: wyraża on pracę siły normalnej N na względnym wydłużeniu osi środkowej λ i momentu zginającego M na względnym przyroście kąta obrotu przekroju η (por. [9]).

Ostatecznie więc energia sprężysta pręta silnie zakrzywionego wyrażona przez uogólnione odkształcenia i naprężenia ma postać:

$$U = \frac{1}{2} \int_l N \lambda dl + \frac{1}{2} \int_l M \eta dl + \frac{1}{2} \int_l T \gamma dl \quad (2.11)$$

Można ją wyrazić przez odkształcenia uogólnione jako:

$$U = \frac{1}{2} \int_l EA \lambda^2 dl + \frac{1}{2} \int_l EI^* \left(\eta - \frac{\lambda}{R} \right)^2 dl + \frac{1}{2} \int_l \frac{GA}{\bar{\kappa}} \gamma^2 dl \quad (2.12)$$

oraz przez naprężenia uogólnione:

$$U = \frac{1}{2} \int_l \frac{N^2}{EA} dl + \frac{1}{2} \int_l \frac{M^2}{EI^*} dl + \frac{1}{2} \int_l \frac{M^2}{EAR^2} dl + \int_l \frac{MN}{EAR} dl + \frac{1}{2} \int_l \frac{\bar{\kappa} T^2}{GA} dl$$

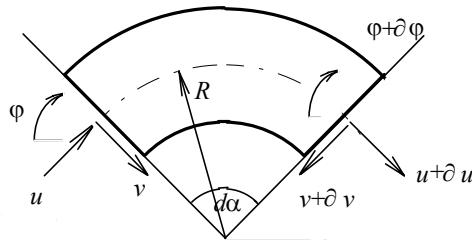
(por. [9, 13]). Ewentualnie po podstawieniu zastępczego momentu bezwładności J :

$$J = \frac{I^* AR^2}{I^* + AR^2}$$

energia sprężysta wynosi:

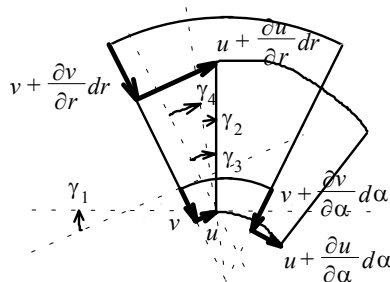
$$U = \frac{1}{2} \int_l \frac{N^2}{EA} dl + \frac{1}{2} \int_l \frac{M^2}{EJ} dl + \int_l \frac{MN}{EAR} dl + \frac{1}{2} \int_l \frac{\bar{\kappa} T^2}{GA} dl \quad (2.13)$$

W celu wyrażenia energii sprężystej pręta przez przemieszczenia obwodowe u , promieniowe v oraz całkowity kąt obrotu przekroju φ , w którym uwzględnia się także średni kąt odkształcenia postaciowego, (Rys. 2.2) należy wyznaczyć zależności pomiędzy odkształceniami uogólnionymi λ , η oraz γ a tymi przemieszczeniami.



Rys. 2.2

Zostaną one obliczone na podstawie rozważań geometrycznych (Rys. 2.3). Rozpatruje się fragment łuku o kącie rozwarcia $d\alpha$ i wymiarze w kierunku promieniowym dr .



Rys. 2.3

Tensor odkształcenia (płaski stan odkształcenia) ma postać:

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\alpha} \\ \varepsilon_{\alpha r} & \varepsilon_{\alpha\alpha} \end{bmatrix}.$$

Poszczególne elementy tego tensora można wyrazić:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{v + \frac{\partial v}{\partial r} dr - v}{dr} = \frac{\partial v}{\partial r},$$

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial \alpha} d\alpha - u}{Rd\alpha} + \frac{Rd\alpha - (R+v)d\alpha}{Rd\alpha} = \frac{\partial u}{R\partial \alpha} - \frac{v}{R},$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r\alpha} &= \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2) = \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_3 + \gamma_4) = \frac{1}{2} \left(\frac{v + \frac{\partial v}{\partial \alpha} d\alpha - v}{Rd\alpha} - \frac{u + \frac{\partial u}{\partial r} dr - u}{dr} + \frac{u}{R} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{R\partial \alpha} - \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{R} \right). \end{aligned}$$

Wyrażając funkcje przemieszczeń przez przemieszczenia osi środkowej pręta zakrzywionego otrzymuje się:

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{R\partial \alpha} + \frac{u}{R} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{R\partial \alpha} + \frac{u}{R} \right) & \frac{\partial u}{R\partial \alpha} - \frac{v}{R} \end{bmatrix}.$$

Stąd wielkości uogólnionych odkształceń można przedstawić w postaci:

$$\lambda = \varepsilon_{\alpha\alpha}, \quad \eta = \frac{\partial \varphi}{R\partial \alpha}, \quad \gamma = \varphi - 2\varepsilon_{r\alpha}.$$

Zapisując:

$$R\partial \alpha = \partial l \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial(\quad)}{\partial l} = (\quad)_{,l}$$

otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \lambda &= u_{,l} - \frac{v}{R} \\ \eta &= \varphi_{,l} \\ \gamma &= \varphi - \frac{u}{R} - v_{,l} \end{aligned} \tag{2.14}$$

Wykorzystując zależności (2.14) można ostatecznie wyrazić energię sprężystą pręta przez przemieszczenia:

$$U = \frac{1}{2} \int_l EA \left(u_{,l} - \frac{v}{R} \right)^2 dl + \frac{1}{2} \int_l EI^* \left(\varphi_{,l} - \frac{u_{,l}}{R} + \frac{v}{R^2} \right)^2 dl + \frac{1}{2} \int_l \frac{GA}{\bar{\kappa}} \left(\varphi - \frac{u}{R} - v_{,l} \right)^2 dl \tag{2.15}$$