

Wykład 2 – Metoda Klasyczna – część I

Zawartość:

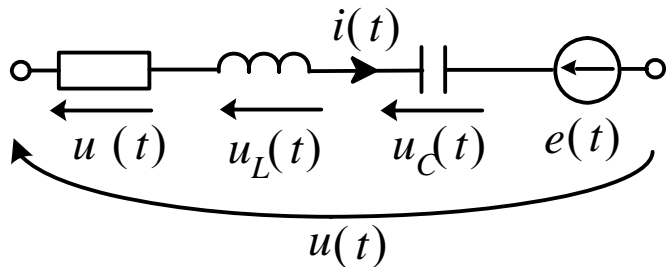
1	Metoda klasyczna – wyznaczanie stanu nieustalonego w dziedzinie czasu (w dziedzinie rzeczywistej) – $t > 0$	2
1.1	Wprowadzenie	2
1.2	Równania różniczkowe liniowe – zależności ogólne	4
1.3	Diagram operacji prowadzących do wyznaczenia odpowiedzi w stanie nieustalonym	9
2	Stan nieustalony w gałęzi RL	10
2.1	Załączanie szeregowej gałęzi RL na napięcie stałe	10
2.2	Zwarcie w gałęzi szeregowej RL zasilanej początkowo napięciem stałym	17
2.3	Załączanie szeregowej gałęzi RL na napięcie sinusoidalne	22



1 Metoda klasyczna – wyznaczanie stanu nieustalonego w dziedzinie czasu (w dziedzinie rzeczywistej) – $t > 0$

1.1 Wprowadzenie

Metoda klasyczna analizy stanu nieustalonego w obwodzie SLS bazuje na wykorzystaniu związków różniczkowo-całkowych na elementach obwodu oraz praw Kirchhoffa w zapisie sygnałowym (czasowym). Dla pojedynczej gałęzi zbudowanej z elementów RLC i źródła napięciowego II prawo Kirchhoffa przyjmie postać:



$$u(t) = i(t)R + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt + e(t)$$

Obwód zbudowany z g gałęzi i w węzłów można opisać za pomocą układu równań Kirchhoffa zawierającego:

- $m=w-1$ niezależnych równań I Prawa Kirchhoffa, $\sum_{k=1}^K i_{kw}(t) = 0$
- $n=g-(w-1)$ niezależnych równań II Prawa Kirchhoffa, $\sum_{l=1}^L u_{ln}(t) + \sum_{m=1}^M e_{mn}(t) = 0$



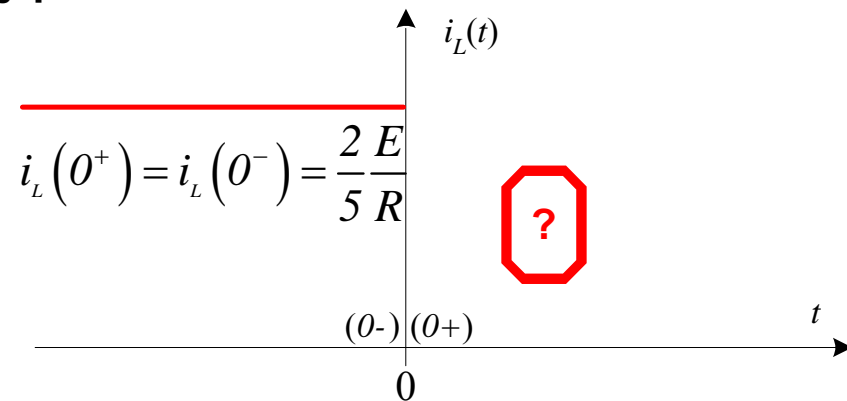
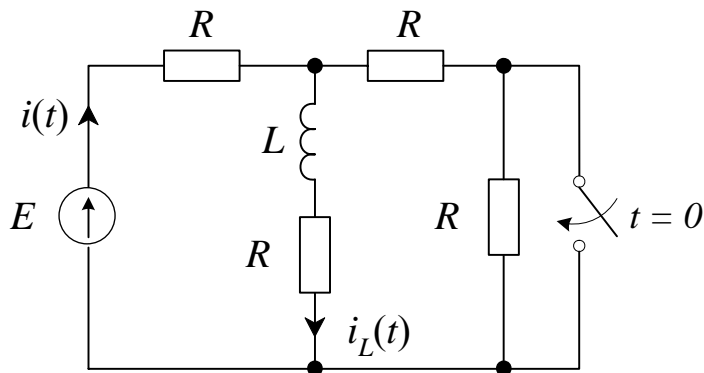
W efekcie otrzymujemy układ Praw Kirchhoffa, który jest układem równań różniczkowo-całkowych.

Układ ten rozwiązuje się względem jednej wybranej zmiennej tzn. wybranego prądu w gałęzi lub napięcia na elemencie. Ze względu na zachowawczość oraz definicyjne związki prądowo-napięciowe oparte na zależnościach różniczkowo-całkowych, przyjęło się rozwiązywać układ równań ze względu na wybrany prąd płynący przez cewkę lub napięcie na kondensatorze.

Po przekształceniach względem wybranej zmiennej, układ równań zostaje zredukowany do jednego równania opisującego daną zmienną (np. prąd płynący przez cewkę $i_L(t)$ lub napięcie na kondensatorze $u_C(t)$), które ma charakter **RÓWNANIA RÓŻNICZKOWEGO LINIOWEGO ZWYCZAJNEGO O STAŁYCH WSPÓŁCZYNNIKACH, najczęściej NIEJEDNORODNEGO.**

W obwodach elektrycznych, rozważania te przeznaczone są do odkrycia charakteru przebiegu $i_L(t)$ lub $u_C(t)$, a wreszcie wszystkich pozostałych napięć i prądów w obwodzie, po komutacji, czyli umownie dla $t > t_0$, czy też $t > 0$.

Przykładowy problem:



1.2 Równania różniczkowe liniowe – zależności ogólne

Równanie różniczkowe liniowe **niejednorodne**, rzędu n , o stałych współczynnikach

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = f(t) \quad \text{dla} \quad t > t_0$$

Równanie różniczkowe liniowe **jednorodne**, rzędu n , o stałych współczynnikach

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = 0 \quad \text{dla} \quad t > t_0$$

- $y(t)$ reprezentuje np. $i_L(t)$ lub $u_C(t)$.
- Stałe współczynniki a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 są kombinacją liniową parametrów RLC.
- Funkcja $f(t)$ jest związana z wymuszeniami, czyli napięciami i prądami źródłowymi.
- Rząd n równania zależy od liczby elementów zachowawczych (LC) oraz od struktury obwodu po komutacji.

Poszukiwane $y(t)$ jest rozwiązaniem ogólnym równania niejednorodnego. Z teorii równań różniczkowych liniowych, rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego (*RORN*) można odnaleźć jako sumę rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego (*RSRN*) oraz rozwiązania ogólnego równania jednorodnego (*RORJ*).



W obwodach elektrycznych zamiast określenia "rozwiązanie szczególne" używa się zwykle: "składowa wymuszona" lub "składowa ustalona"- $y_u(t)$, natomiast zamiast - "rozwiązanie ogólne równania jednorodnego" stosuje się określenie - "składowa przejściowa" $y_p(t)$ lub ogólniej "składowa swobodna".

$$RORN = RSRN + RORJ \Rightarrow y(t) = y_u(t) + y_p(t)$$

▪ ***RSRN, składowa wymuszona, składowa ustalona*** $y_u(t)$

W obwodach elektrycznych, w których wymuszenia mają przebiegi stałe lub sinusoidalne, jako rozwiązanie szczególne przyjmuje się zazwyczaj **rozwiązanie w stanie ustalonym po komutacji (tj. dla $t \rightarrow +\infty$)**. Rozwiązanie to może być wyznaczone przy wykorzystaniu ogólnych metod rozwiązywania obwodów, w tym metody symbolicznej. Wymaga to przeprowadzenia klasycznej analizy obwodu o strukturze po komutacji, w stanie ustalonym.

▪ ***RORJ, składowa przejściowa, składowa swobodna*** $y_p(t)$

Składowa przejściowa, jako rozwiązanie ogólne równania jednorodnego, odnaleźć można wykorzystując **wielomian charakterystyczny** (równanie charakterystyczne)

$V(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$, który powstaje przez zastąpienie różniczek liniowym parametrem λ :

$$a_n \frac{d^n y_p(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y_p(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy_p(t)}{dt} + a_0 y_p(t) = 0 \quad \text{dla} \quad t > t_0$$

$$\Rightarrow a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$



Poszukujemy **pierwiastków wielomianu charakterystycznego** λ_i tj. $V(\lambda_i) = 0, i = 1, 2, \dots, r$.

Pierwiastki wielomianu charakterystycznego mogą być wielokrotne, przy czym suma krotności poszczególnych pierwiastków musi być równa rzędowi równania:

$$\sum_{i=1}^r n_i = n, \quad n_i - \text{krotność } i\text{-tego pierwiastka, } n - \text{rzęd równania.}$$

Rozwiązanie $y_{ip}(t)$ odpowiadające i -temu pierwiastkowi charakterystycznemu, zależy od wartości λ_i oraz od jego krotności n_i , co ogólnie można zapisać następująco (**przewidywana postać składowej przejściowej**):

$$y_{ip}(t) = A_{i1} e^{\lambda_i(t-t_0)} + A_{i2} (t-t_0) e^{\lambda_i(t-t_0)} + \dots + A_{in_i} (t-t_0)^{n_i-1} e^{\lambda_i(t-t_0)}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

Ostatecznie składową przejściową wyznaczamy jako sumę wszystkich składników przejściowych w zależności od liczby pierwiastków równania charakterystycznego $i = 1, 2, \dots, r$ oraz ich krotności $k = 1, 2, \dots, n_i$

$$y_p(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{n_i} A_{ik} (t-t_0)^{k-1} e^{\lambda_i(t-t_0)} \quad \text{dla } t > t_0$$



Przykłady przewidywanej postaci składowej przejściowej dla $t_0=0$ w zależności od pierwiastków wielomianu charakterystycznego λ_i

jeden pierwiastek rzeczywisty	λ_1	$y_p(t) = A_{11}e^{\lambda_1 t}, t > 0$
dwa różne pierwiastki rzeczywiste, $\Delta > 0$	λ_1, λ_2	$y_p(t) = A_{11}e^{\lambda_1 t} + A_{21}e^{\lambda_2 t}, t > 0$
jeden pierwiastek rzeczywisty podwójny $\Delta = 0$	$\lambda_1, k = 1, 2$	$y_p(t) = A_{11}e^{\lambda_1 t} + A_{12}te^{\lambda_1 t}, t > 0$
dwa zespolone sprzężone $\Delta < 0$	λ_1 $\lambda_2 = \lambda_1^*$	$y_p(t) = A_{11}e^{\lambda_1 t} + A_{21}e^{\lambda_2 t}, t > 0$

UWAGA:

Do wyznaczenia stałych A_{ik} konieczna jest znajomość warunków początkowych, obejmujących również wartość składowej ustalonej w chwili $t=t_{0+}$. W zależności od rzędu równania n mogą być również wymagane warunki początkowe dla pochodnych.



Przykłady wymagań dla warunków początkowych $t_0=0+$ w zależności od rzędu równania różniczkowego n

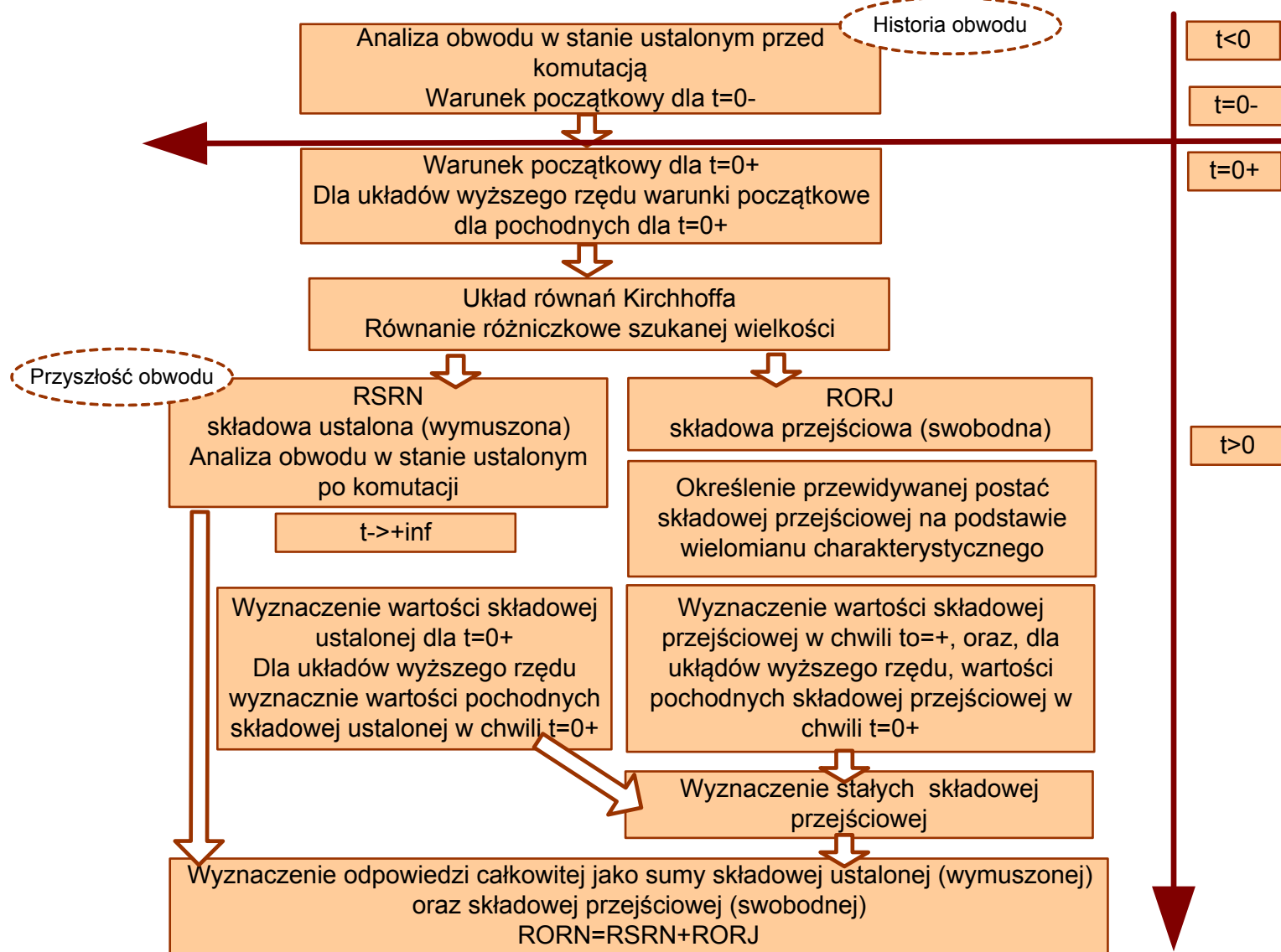
n=1	jeden pierwiastek rzeczywisty	λ_1	$y(0^+)$	$y_u(0^+)$
n=2	dwa różne pierwiastki rzeczywiste, $\Delta > 0$	λ_1, λ_2	$y(0^+), \frac{dy(0^+)}{dt}$	$y_u(0^+), \frac{dy_u(0^+)}{dt}$
	jeden rzeczywisty pierwiastek podwójny $\Delta = 0$	$\lambda_1, k = 1, 2$		
	jeden zespolony pierwiastek sprzężony $\Delta < 0$	λ_1 $\lambda_2 = \lambda_1^*$		

UWAGA: KOŃCOWE ROZWIĄZANIE:

$$RORN = RSRN + RORJ \Rightarrow y(t) = y_u(t) + y_p(t)$$

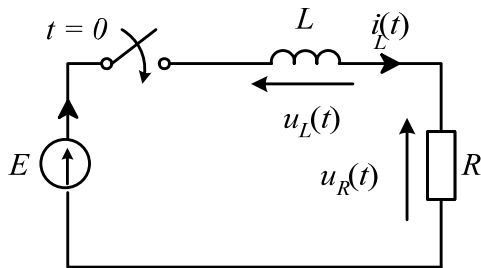


1.3 Diagram operacji prowadzących do wyznaczenia odpowiedzi w stanie nieustalonym



2 Stan nieustalony w gałęzi RL

2.1 Załączanie szeregowej gałęzi RL na napięcie stałe



Dane: $e(t) = E = \text{const.}$
 R, L

Jeden element zachowawczy – L
 Równanie różniczkowe oprzeć na $i_L(t)$

1. $t < 0$, Analiza obwodu w stanie ustalonym przed komutacją (historia obwodu) oraz wyznaczenie warunku początkowego dla $t = 0^-$

$$i_L(t) = 0$$

$$i_L(0^-) = 0$$

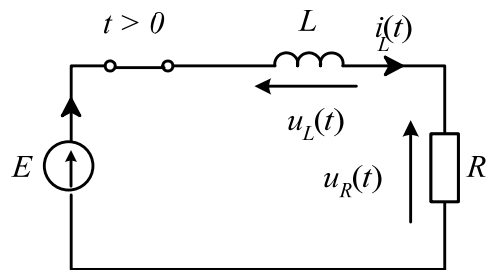
2. $t = 0^+$, wyznaczenie warunku początkowego dla $t = 0^+$

Po załączeniu łącznika sprawdzamy istnienie węzłów osobliwych. Gałąź z E nie zawiera elementów indukcyjnych - nie stwierdzamy węzła osobliwego, a zatem prąd na cewce zachowuje prawa komutacji.

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$$



3. $t \geq 0$, układ równań Kirchhoffa oraz wyznaczenie równania różniczkowego opisującego $i_L(t)$



$$\begin{cases} i(t) = i_L(t) \\ E = L \frac{di_L(t)}{dt} + Ri_L(t) \end{cases}$$

Stąd równanie różniczkowe opisujące prąd płynący przez cewkę w stanie nieustalonym, tj. dla $t > 0$:

$$E = L \frac{di_L(t)}{dt} + Ri_L(t)$$

Stwierdzamy **równanie różniczkowe liniowe niejednorodne o stałych współczynnikach**. Szukane rozwiązanie tj. prąd $i_L(t)$ w stanie nieustalonym znajdziemy jako:

$$RORN = RSRN + RORJ \Rightarrow i_L(t) = i_{Lu}(t) + i_{Lp}(t)$$

4. $t \rightarrow +\infty$, analiza obwodu w stanie ustalonym po komutacji (przyszłość obwodu) – składowa ustalona odpowiedzi (składowa wymuszona) $i_{Lu}(t)$

W stanie ustalonym po komutacji napięcie na cewce będzie równe zero, ze względu na stałe wymuszenie E . Obwód będzie miał charakter czysto-rezystancyjny. Równania opisujące obwód przyjmą postać:

$$\begin{cases} i_u(t) = i_{Lu}(t) \\ E = Ri_{Lu}(t) \end{cases} \Rightarrow i_{Lu}(t) = \frac{E}{R}$$



W szczególności wyznaczmy wartość składowej ustalonej w chwili $t=0^+$:

$$i_{Lu}(0^+) = \frac{E}{R}$$

5. $t > 0$, składowa przejściowa (swobodna) $i_{Lp}(t)$

Równanie jednorodne
$$L \frac{di_{Lp}(t)}{dt} + Ri_{Lp}(t) = 0$$

Wielomian charakterystyczny
$$V(\lambda) = L\lambda + R$$

Pierwiastki wielomianu charakterystycznego
$$L\lambda + R = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{R}{L}$$
 stwierdzamy jeden pierwiastek rzeczywisty

Przewidywana postać składowej przejściowej
$$i_{Lp}(t) = Ae^{\lambda t} = Ae^{-\frac{R}{L}t}, \text{ dla } t > 0$$

W szczególności wartość składowej ustalonej dla $t=0^+$
$$i_{Lp}(0^+) = A$$



$$i_L(t) = i_{Lu}(t) + i_{Lp}(t), \text{ dla } t > 0 \text{ a zatem również dla } t=0+$$

$$i_L(0^+) = i_{Lu}(0^+) + i_{Lp}(0^+)$$

Wyznaczenie stałej A i pełnej postaci składowej przejściowej

$$0 = \frac{E}{R} + A \Rightarrow A = -\frac{E}{R}$$

Ostatecznie składowa przejściowa:

$$i_{Lp}(t) = Ae^{\lambda t} = -\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}, \text{ dla } t > 0$$

6. Ostatecznie prąd płynący przez cewkę w stanie nieustalonym jest sumą składowej ustalonej (wymuszonej) i przejściowej (swobodnej):

$$RORN = RSRN + RORJ \Rightarrow i_L(t) = i_{Lu}(t) + i_{Lp}(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}, \text{ dla } t > 0$$

Sprawdźmy rozwiązanie ze względu na zachowanie ciągłości prądu przy przejściu ze stanu ustalonego przed komutacją do stanu przejściowego czyli w $t=0^+$.

Wiemy z początkowych rozważań, że układ przed komutacją nie był zasilany i spełnił prawa komutacji czyli: $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$

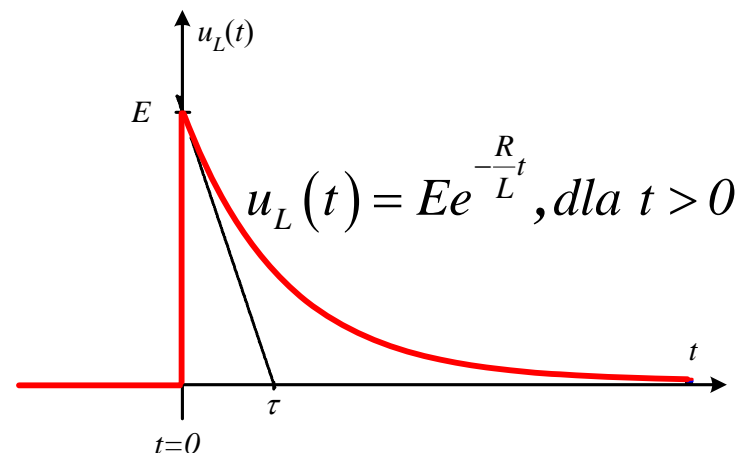
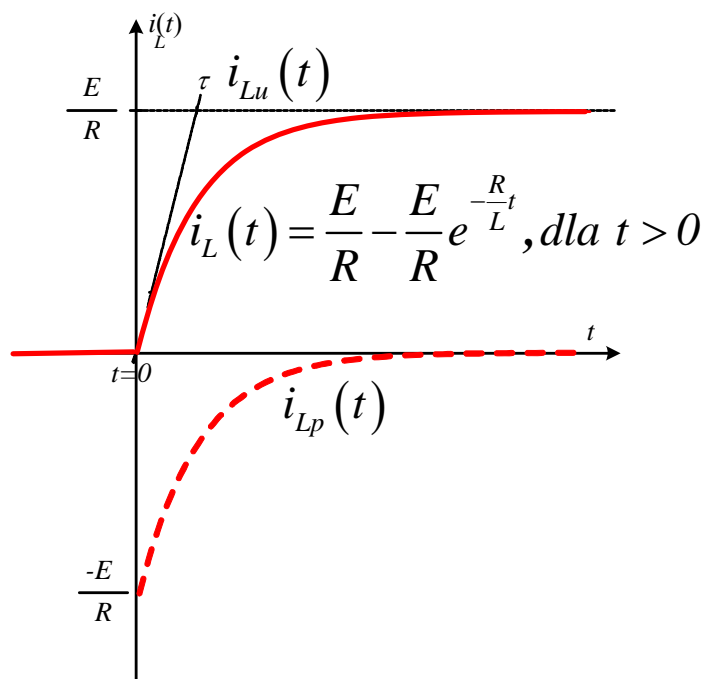
Teraz wstawmy do rozwiązania $t=0$ na $i_L(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t} \Big|_{t=0} = 0$

Sprawdzone



Dodatkowo chcąc wyznaczyć napięcie na cewce $u_L(t)$ w stanie nieustalonym możemy wykorzystać wyznaczony prąd $i_L(t)$ oraz ogólną zależność różniczkową:

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = L \left[\frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t} \right]' = -L \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t} \cdot \left(-\frac{R}{L} \right) = E e^{-\frac{R}{L}t}, \text{ dla } t > 0$$



UWAGA: prąd płynący przez cewkę zachowuje ciągłość, natomiast napięcie na cewce w pierwszej fazie przejścia do stanu nieustalonego reaguje skokiem jednostkowym.

Komentarz:

Szybkość zanikania składowej przejściowej zależy od elementów RL obwodu. Parametrem, który opisuje czas (w sekundach) zanikania składowej przejściowej jest stała czasowa τ , którą wyznaczyć możemy jako odwrotność pierwiastka wielomianu charakterystycznego ze znakiem przeciwnym:

$$\tau = -\frac{1}{\lambda}$$

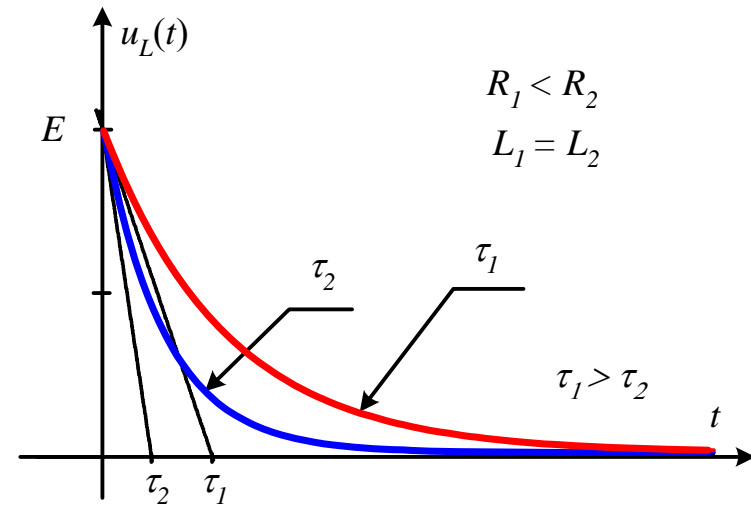
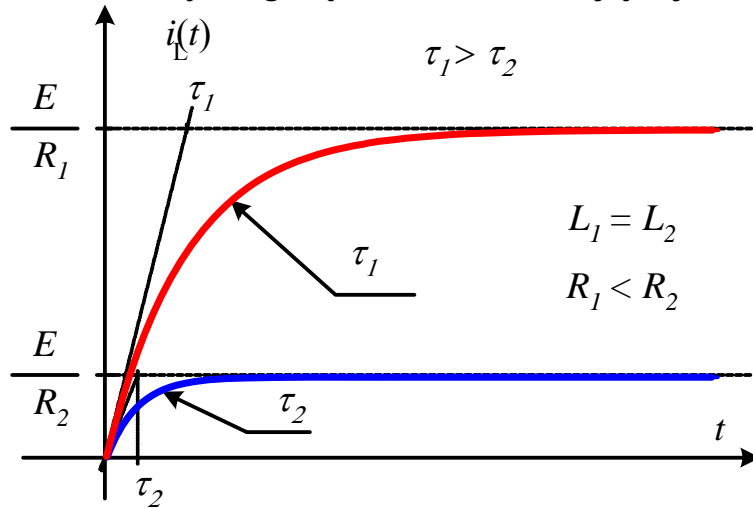
Stała czasowa τ określa czas([s]), po którym wartość bezwzględna składowej przejściowej, wyrażona w procentach składowej ustalonej, maleje e razy.

Udział składowej przejściowej w czasie w zależności od stałej czasowej τ

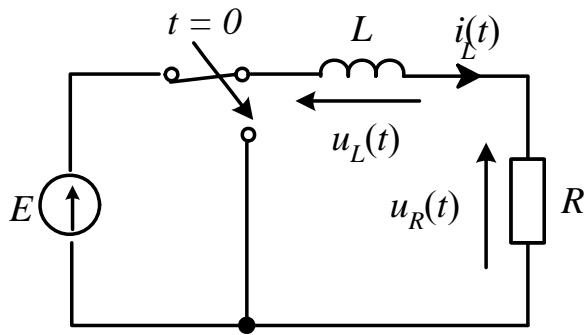
Czas[s]	0	1τ	2τ	3τ	4τ	5τ	6τ	7τ
$\frac{ i_p }{i_u} 100[\%]$	100	36.78	13.53	4.98	1.83	0.674	0.428	0.091



Dla rozważanego przypadku obwodu szeregowego RL $\tau = \frac{L}{R}$. Stąd wniosek, że szybciej będzie zanikał stan nieustalony w gałęzi RL zawierającej duże rezystancje.



2.2 Zwarcie w gałęzi szeregowej RL zasilanej początkowo napięciem stałym



Dane: $e(t) = E = \text{const.}$ Jeden element zachowawczy – L
 R, L Równanie różniczkowe oprzeć na $i_L(t)$

1. $t < 0$, Analiza obwodu w stanie ustalonym przed komutacją (historia obwodu) oraz wyznaczenie warunku początkowego dla $t = 0$ -

$$i_L(t) = \frac{E}{R}$$

$$i_L(0^-) = \frac{E}{R}$$

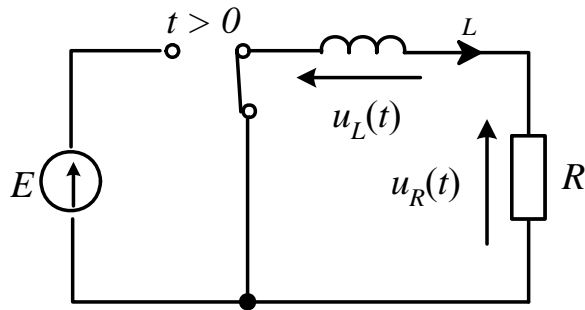
2. $t = 0+$, wyznaczenie warunku początkowego dla $t = 0+$

Po załączeniu łącznika nie stwierdzamy węzła osobiwego, a zatem prąd na cewce zachowuje prawa komutacji.

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = \frac{E}{R}$$



3. $t \geq 0$, układ równań Kirchhoffa oraz wyznaczenie równania różniczkowego opisującego $i_L(t)$



$$0 = L \frac{di_L(t)}{dt} + Ri_L(t)$$

Stąd równanie różniczkowe opisujące prąd płynący przez cewkę w stanie nieustalonym, tj. dla $t > 0$:

$$0 = L \frac{di_L(t)}{dt} + Ri_L(t)$$

Stwierdzamy **równanie różniczkowe liniowe jednorodne o stałych współczynnikach**. Szukane rozwiązanie tj. prąd $i_L(t)$ w stanie nieustalonym zawierał będzie jedynie *RORJ*, czyli składową przejściową:

$$RORJ \Rightarrow i_L(t) = i_{Lp}(t)$$

$$RSRN = i_{Lu}(t) = 0$$

W takim przypadku nie jest konieczne wyznaczanie składowej ustalonej $i_{Lu}(t)$. Jednakże, wskazaną praktyką jest przyjrzenie się pracy obwodu w stanie ustalonym po komutacji. Zauważymy, że obwód pozostaje po komutacji bez wymuszenia. A zatem w stanie ustalonym po komutacji, tj. po rozładowaniu energii cewki przez rezystor, prąd płynący przez cewkę osiągnie wartość zero.

4. $t > 0$, składowa przejściowa (swobodna) $i_{Lp}(t)$

Równanie jednorodne
$$L \frac{di_{Lp}(t)}{dt} + Ri_{Lp}(t) = 0$$

Wielomian charakterystyczny
$$V(\lambda) = L\lambda + R$$

Pierwiastki wielomianu charakterystycznego
$$L\lambda + R = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{R}{L}$$
 stwierdzamy jeden pierwiastek rzeczywisty

Przewidywana postać składowej przejściowej
$$i_{Lp}(t) = Ae^{\lambda t} = Ae^{-\frac{R}{L}t}, \text{ dla } t > 0$$

W szczególności wartość składowej ustalonej dla $t=0^+$
$$i_{Lp}(0^+) = A$$

$$i_L(t) = i_{Lp}(t), \text{ dla } t > 0 \text{ a zatem również dla } t=0^+$$

$$i_L(0^+) = i_{Lp}(0^+) \Rightarrow \frac{E}{R} = A$$

Wyznaczenie stałej A i pełnej postaci składowej przejściowej

Ostatecznie składowa przejściowa:

$$i_{Lp}(t) = \frac{E}{R} e^{\lambda t} = \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t}, \text{ dla } t > 0$$

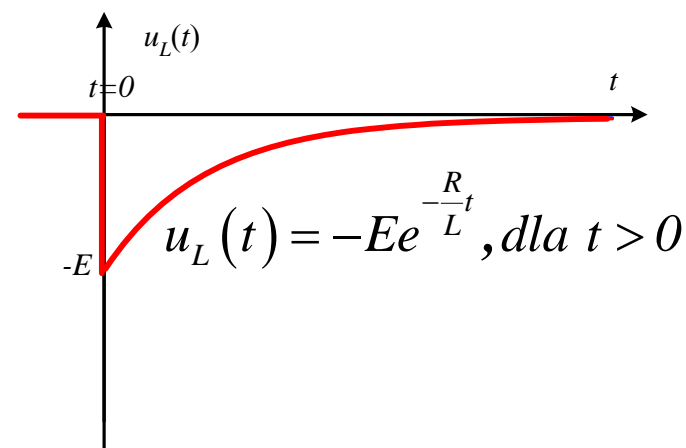
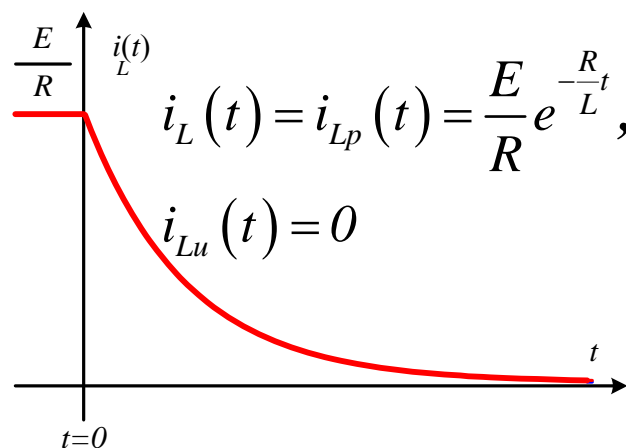


5. Ostatecznie prąd płynący przez cewkę w stanie nieustalonym składa się jedynie ze składowej przejściowej (swobodnej):

$$RORJ \Rightarrow i_L(t) = i_{Lp}(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t}, \text{ dla } t > 0$$

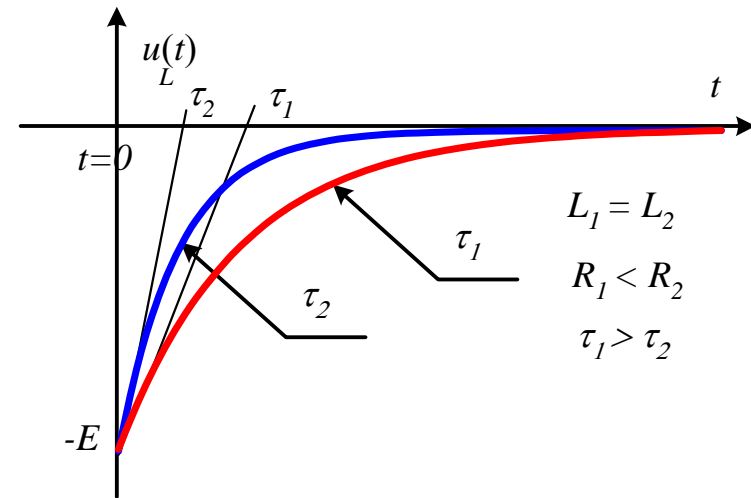
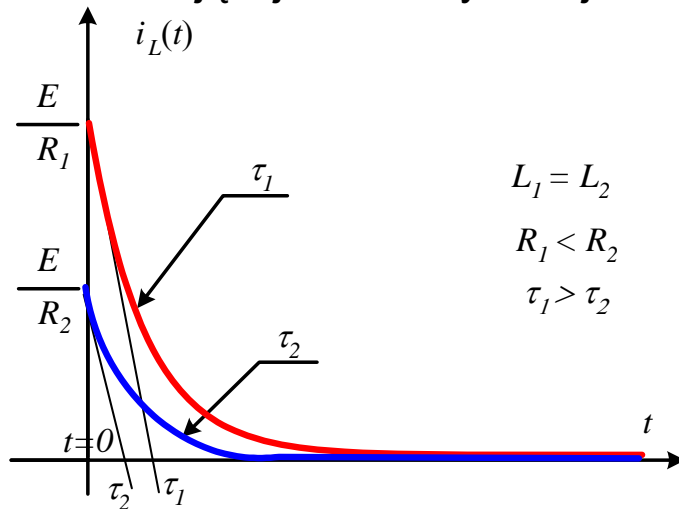
Chcąc wyznaczyć napięcie na cewce $u_L(t)$ w stanie nieustalonym możemy wykorzystać wyznaczony prąd $i_L(t)$ oraz ogólną zależność różniczkową:

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = L \left[\frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t} \right]' = L \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t} \cdot \left(-\frac{R}{L} \right) = -E e^{-\frac{R}{L}t}, \text{ dla } t > 0$$

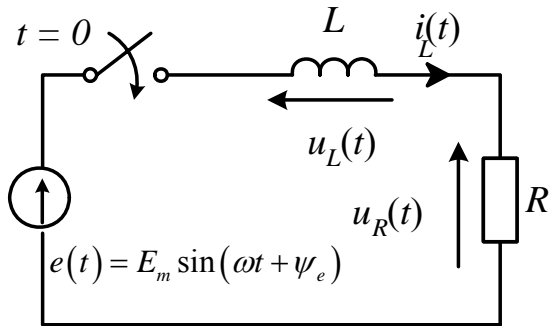


UWAGA: prąd płynący przez cewkę zachowuje ciągłość, natomiast napięcie na cewce w pierwszej fazie przejścia do stanu nieustalonego reaguje skokiem jednostkowym.

Dla rozważanego przypadku RL $\tau = \frac{L}{R}$. Stąd wniosek, że szybciej będzie zanikał stan nieustalony w gałęzi RL zawierającej duże rezystancje.



2.3 Załączanie szeregowej gałęzi RL na napięcie sinusoidalne



Dane:

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi_e)$$

R, L

Jeden element zachowawczy – L
Równanie różniczkowe oprzeć na
 $i_L(t)$

1. $t < 0$, Analiza obwodu w stanie ustalonym przed komutacją (historia obwodu) oraz wyznaczenie warunku początkowego dla $t = 0$ -

$$i_L(t) = 0$$

$$i_L(0^-) = 0$$

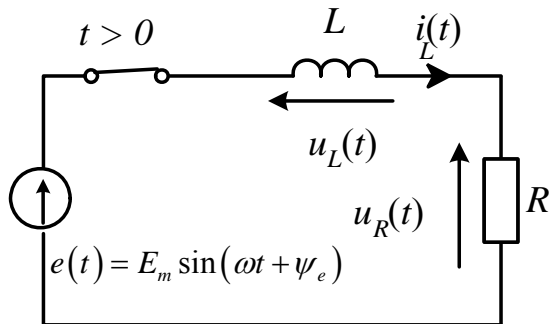
2. $t = 0+$, wyznaczenie warunku początkowego dla $t = 0+$

Po załączeniu łącznika nie stwierdzamy węzła osobliwego, a zatem prąd na cewce zachowuje prawa komutacji.

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$$



3. $t \geq 0$, układ równań Kirchhoffa oraz wyznaczanie równania różniczkowego opisującego $i_L(t)$



$$E_m \sin(\omega t + \psi_e) = L \frac{di_L(t)}{dt} + Ri_L(t)$$

Stąd równanie różniczkowe opisujące prąd płynący przez cewkę w stanie nieustalonym, tj. dla $t > 0$:

$$E_m \sin(\omega t + \psi_e) = L \frac{di_L(t)}{dt} + Ri_L(t)$$

Stwierdzamy **równanie różniczkowe liniowe niejednorodne o stałych współczynnikach**. Szukane rozwiązanie tj. prąd $i_L(t)$ w stanie nieustalonym znajdziemy jako:

$$RORN = RSRN + RORJ \Rightarrow i_L(t) = i_{Lu}(t) + i_{Lp}(t)$$

4. $t \rightarrow +\infty$, analiza obwodu w stanie ustalonym po komutacji (przyszłość obwodu) – składowa ustalona odpowiedzi (składowa wymuszona) $i_{Lu}(t)$

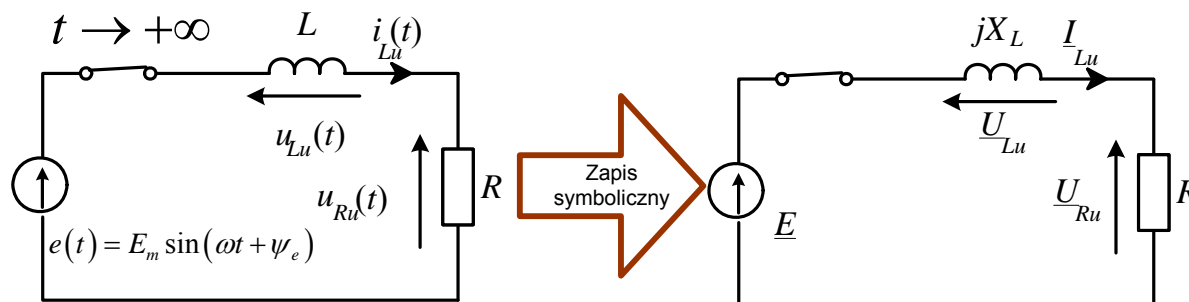
W stanie ustalonym po komutacji napięcie i prąd w obwodzie, ze względu na sinusoidalne wymuszenie $e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi_e)$, będą miały charakter sinusoidalny, a obwód może być traktowany jako impedancyjny, a ściślej rzecz biorąc rezystancyjno-indukcyjny. Równania opisujące obwód przyjmą postać:

$$E_m \sin(\omega t + \psi_e) = U_{Lum} \sin(\omega t + \psi_{Lu}) + U_{Rum} \sin(\omega t + \psi_{Ru})$$



Przy prądzie o charakterze: $i_{Lu}(t) = I_{Lum} \sin(\omega t + \psi_{iu})$

UWAGA: Przy tego rodzaju wymuszeniu nie możemy traktować cewki jako „przewodu”. Zmiennemu w czasie sinusoidalnemu sygnałowi prądu odpowie wyindukowane sinusoidalne napięcie na cewce indukcyjnej. Do rozwiązania tego „lokalnego” problemu możemy wykorzystać analizę obwodu z wykorzystaniem metody symbolicznej.



Wartości rzeczywiste, czasowe

Zapis symboliczny, wektor zespolony, wskaz

$$\underline{I}_{Lu} = \frac{\underline{E}}{\underline{z}} = \frac{E e^{j\psi_e}}{z e^{j\varphi}} = \frac{E}{z} e^{j(\psi_e - \varphi)} = \frac{E_m / \sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{j(\psi_e - \varphi)}$$

$$z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}, \varphi = \arctg\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

$$i_{Lu}(t) = I_{Lum} \sin(\omega t + \psi_{iu}) = \frac{E_m}{z} \sin(\omega t + \psi_e - \varphi)$$



W szczególności wyznaczmy wartość składowej ustalonej w chwili $t=0^+$:

$$i_{Lu}(0^+) = \frac{E_m}{Z} \sin(\psi_e - \varphi)$$

5. $t > 0$, składowa przejściowa (swobodna) $i_{Lp}(t)$

Równanie jednorodne

$$L \frac{di_{Lp}(t)}{dt} + Ri_{Lp}(t) = 0$$

Wielomian charakterystyczny

$$V(\lambda) = L\lambda + R$$

Pierwiastki wielomianu charakterystycznego

$$L\lambda + R = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{R}{L} \text{ stwierdzamy jeden pierwiastek}$$

rzeczywisty

Przewidywana postać składowej przejściowej

$$i_{Lp}(t) = Ae^{\lambda t} = Ae^{-\frac{R}{L}t}, \text{ dla } t > 0$$

W szczególności wartość składowej ustalonej dla $t=0^+$

$$i_{Lp}(0^+) = A$$



$$i_L(t) = i_{Lu}(t) + i_{Lp}(t), \text{ dla } t > 0 \text{ a zatem również dla } t=0+$$

$$i_L(0^+) = i_{Lu}(0^+) + i_{Lp}(0^+)$$

Wyznaczenie stałej A i pełnej postaci składowej przejściowej

$$0 = \frac{E_m}{Z} \sin(\psi_e - \varphi) + A \Rightarrow A = -\frac{E_m}{Z} \sin(\psi_e - \varphi)$$

Ostatecznie składowa przejściowa:

$$i_{Lp}(t) = -\frac{E_m}{Z} \sin(\psi_e - \varphi) e^{-\frac{R}{L}t}, \text{ dla } t > 0$$

6. odpowiedź: prąd płynący przez cewkę w stanie nieustalonym jako suma składowej ustalonej (wymuszonej) i przejściowej (swobodnej):

$$RORN = RSRN + RORJ \Rightarrow i_L(t) = i_{Lu}(t) + i_{Lp}(t) =$$

$$= \frac{E_m}{Z} \sin(\omega t + \psi_e - \varphi) - \frac{E_m}{Z} \sin(\psi_e - \varphi) e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{E_m}{Z} \left(\sin(\omega t + \psi_e - \varphi) - \sin(\psi_e - \varphi) e^{-\frac{R}{L}t} \right), \text{ dla } t > 0$$



Chcąc wyznaczyć pełen rozkład napięć w obwodzie w stanie nieustalonym, na podstawie wyrażenia na $i_L(t)$ możemy wyznaczyć napięcie na cewce w stanie nieustalonym:

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = \omega L \frac{E_m}{Z} \sin\left(\omega t + \psi_e - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + R \cdot \frac{E_m}{Z} \sin(\psi_e - \varphi) e^{-\frac{R}{L}t}, \text{ dla } t > 0$$

Prąd $i_L(t)$ jest prądem w całej gałęzi szeregowej RL. Stąd napięcie na rezystorze $u_R(t)$

$$u_R(t) = R \cdot i(t) = R \frac{E_m}{Z} \sin(\omega t + \psi_e - \varphi) - R \frac{E_m}{Z} \sin(\psi_e - \varphi) e^{-\frac{R}{L}t}, \text{ dla } t > 0$$

Sprawdzenie II Prawa Kirchhoffa:

$$e(t) = u_R(t) + u_L(t) = R \frac{E_m}{Z} \sin(\omega t + \psi_e - \varphi) - \cancel{R \frac{E_m}{Z} \sin(\psi_e - \varphi) e^{-\frac{R}{L}t}} + \\ + \omega L \frac{E_m}{Z} \sin\left(\omega t + \psi_e - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + \cancel{R \cdot \frac{E_m}{Z} \sin(\psi_e - \varphi) e^{-\frac{R}{L}t}}, \text{ dla } t > 0$$

UWAGA: Rozważania na temat chwili załączenia odbiornika RL na napięcie sinusoidalne i wpływu na przebieg stanu nieustalonego

1. Źródło

Źródło sinusoidalne pracuje cały czas zadaną amplitudą E_m oraz pulsacją ω .

Chwila załączenia klucza t_0 może uplasować podanie na odbiornik napięcia w różnym momencie przebiegu chwilowego sinusoidy. Inaczej mówiąc, możemy wyobrazić sobie, że klucz załączony zostanie dokładnie przy przejściu sinusoidy napięcia zasilającego przez zero, bądź przez wartość E_m , lub przez dowolną wartość z przedziału $\langle -E_m, +E_m \rangle$. W ten sposób wybieramy fazę początkową napięcia zasilającego ψ_e .

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi_e) \xrightarrow{t_0=0; \psi_e=0} e(t_0) 0[V] \\ \xrightarrow{t_0=0; \psi_e=\pi/2} e(t_0) E_m[V]$$

Czy będzie miało to wpływ na stan przejściowy odbiornika RL?

2. Odbiornik

Rozważany odbiornik RL przy zadanej pulsacji ω należy rozumieć jako impedancję RL o danym module i fazie φ .

Dla kształtu przebiegu prądu podczas załączaniu odbiornika RL na napięcie sinusoidalne ogromne znaczenie ma relacja fazy początkowej napięcia zasilającego ψ_e (wynikająca z „losowego trafienia w dany punkt sinusoidy przy załączaniu klucza”) w porównaniu do fazy impedancji odbiornika φ .



Jeśli załączenie nastąpi dokładnie w fazie początkowej napięcia zasilającego ψ_e równej fazie impedancji odbiornika φ odbiornik przejdzie natychmiast do pracy ustalonej, bez stanu przejściowego.

$$i_L(t) = i_{Lu}(t) + i_{Lp}(t) = \frac{E_m}{z} \sin(\omega t + \psi_e - \varphi) - \frac{E_m}{z} \sin(\psi_e - \varphi) e^{-\frac{R}{L}t} \xrightarrow{\psi_e = \varphi} i_L(t) = i_{Lu}(t) = \frac{E_m}{z} \sin(\omega t)$$

W każdym innym przypadku, tj. $\psi_e \neq \varphi$, załączaniu odbiornika RL na napięcie sinusoidalne towarzyszyć będzie stan przejściowy, który zaowocuje **zjawiskiem przetężenia prądowego (udaru prądowego)**, objawiającego się zwiększeniem chwilowej wartości prądu w porównaniu do stanu ustalonego.

Porównanie inżynierskie rozważanego zjawisk związanego z udarem prądowym dla różnych parametrów RL odbiornika, wymaga często ujęcia parametrycznego. W tym celu wprowadza się tzw. **współczynnik udaru prądowego (współczynnik przetężenia)**, określony jako stosunek maksymalnej wartości prądu w stanie nieustalonym do wartości maksymalnej (amplitudy) przebiegu w stanie ustalonym, który pozwala w szybki sposób ocenić dwa różne udary prądowe.

$$k_i = \frac{i_{Lmax}}{I_{Lum}}$$

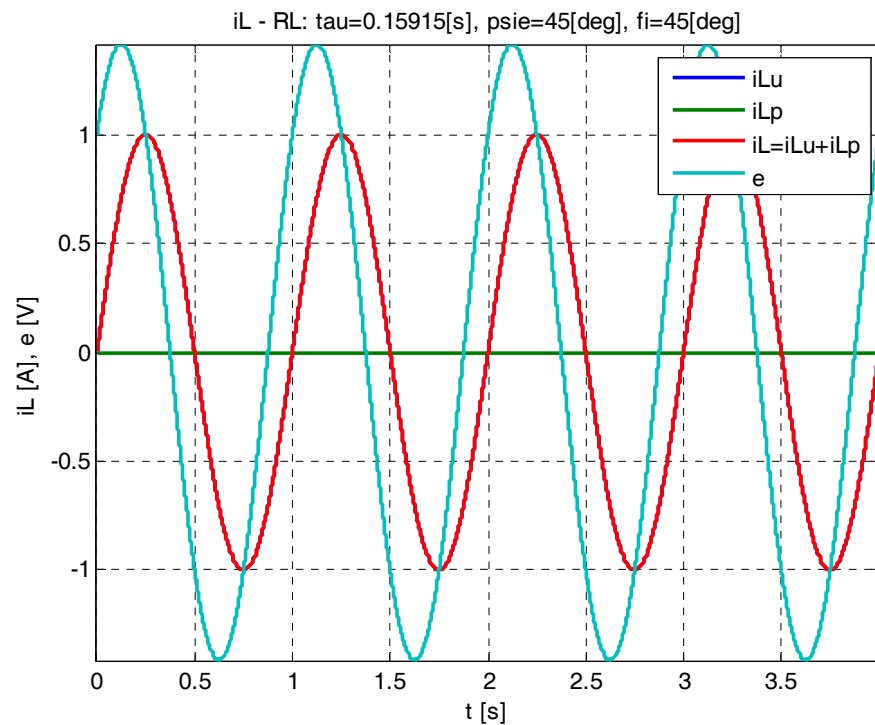


$$f = 1\text{Hz}, \omega = 2\pi \text{rad} / \text{s}$$

$$R = 1\Omega, L = 1 / 2\pi H, X_L = 1\Omega, \varphi = \arctg(X_L / R) = 45^\circ$$

$$e(t) = \sqrt{2} \sin(2\pi \cdot 1 \cdot t + \pi / 4), \psi_e = 45^\circ$$

$$\tau = L / R = 1 / 2\pi = 0.16\text{s}$$



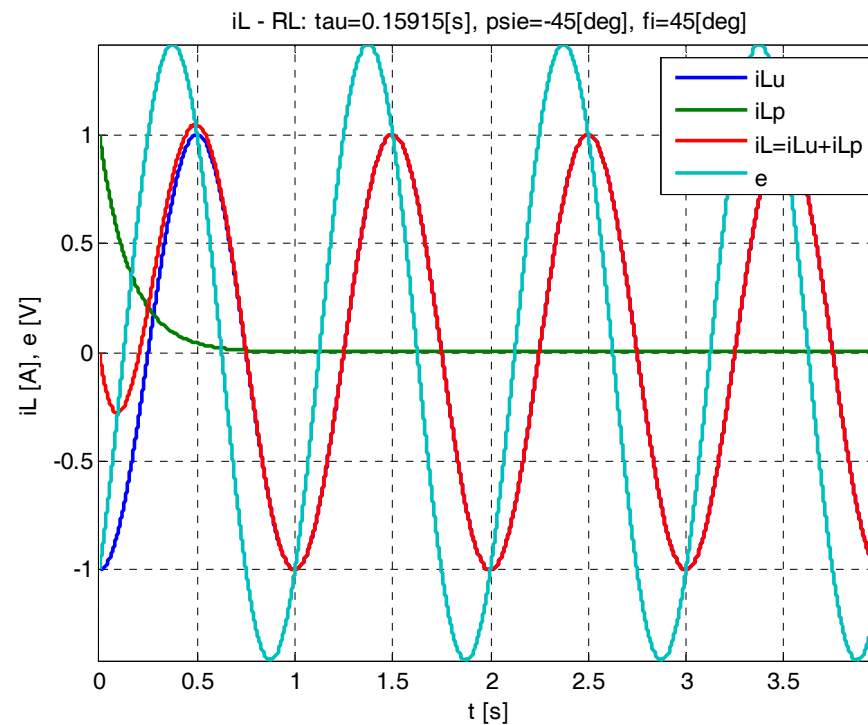
$$I_{Lum} = 1\text{A}, i_{Lmax} = 1\text{A}, k_i = 1$$

$$f = 1\text{Hz}, \omega = 2\pi \text{rad} / \text{s}$$

$$R = 1\Omega, L = 1 / 2\pi H, X_L = 1\Omega, \varphi = \arctg(X_L / R) = 45^\circ$$

$$e(t) = \sqrt{2} \sin(2\pi \cdot 1 \cdot t - \pi / 4), \psi_e = -45^\circ$$

$$\tau = L / R = 1 / 2\pi = 0.16\text{s}$$



$$I_{Lum} = 1\text{A}, i_{Lmax} = 1.0442\text{A}, k_i = 1.0442, t_m = 0.4929\text{s}$$

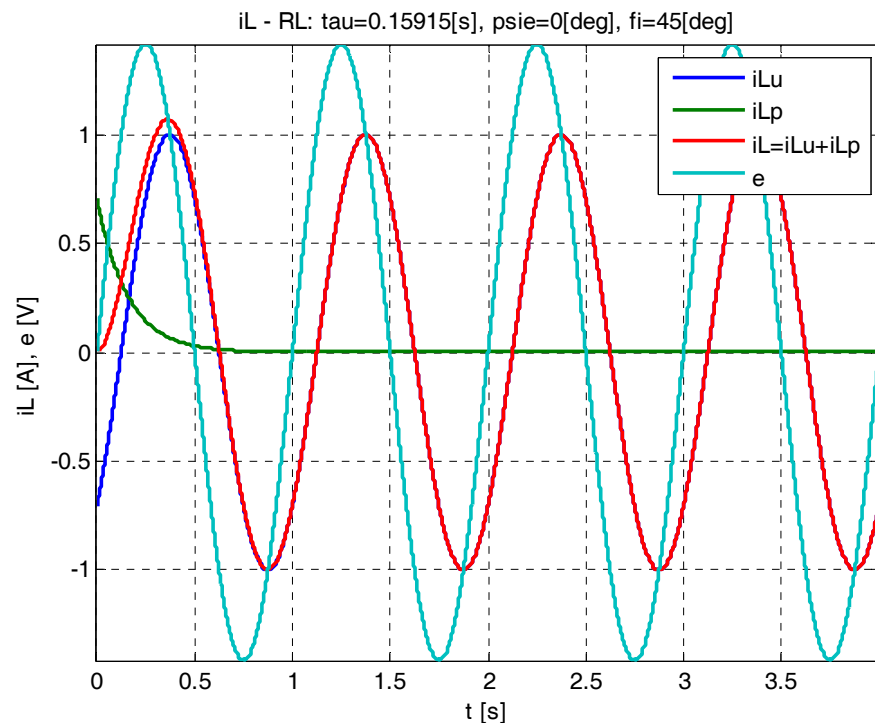


$$f = 1\text{Hz}, \omega = 2\pi \text{rad} / \text{s}$$

$$R = 1\Omega, L = 1 / 2\pi H, X_L = 1\Omega, \varphi = \arctg(X_L / R) = 45^\circ$$

$$e(t) = \sqrt{2} \sin(2\pi \cdot 1 \cdot t + 0), \psi_e = 0^\circ$$

$$\tau = L / R = 1 / 2\pi = 0.16\text{s}$$



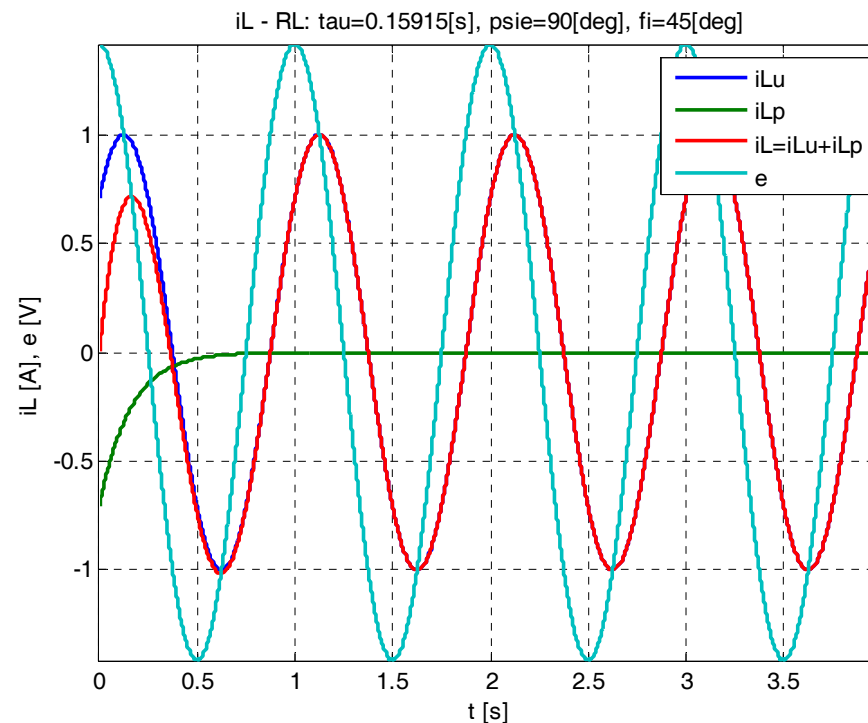
$$I_{Lum} = 1\text{A}, i_{Lmax} = 1.0694\text{A}, k_i = 1.0694, t_m = 0.3636\text{s}$$

$$f = 1\text{Hz}, \omega = 2\pi \text{rad} / \text{s}$$

$$R = 1\Omega, L = 1 / 2\pi H, X_L = 1\Omega, \varphi = \arctg(X_L / R) = 45^\circ$$

$$e(t) = \sqrt{2} \sin(2\pi \cdot 1 \cdot t + \pi / 2), \psi_e = 90^\circ$$

$$\tau = L / R = 1 / 2\pi = 0.16\text{s}$$



$$I_{Lum} = 1\text{A}, i_{Lmax} = 1.0140\text{A}, k_i = 1.0140, t_m = 0.6229\text{s}$$

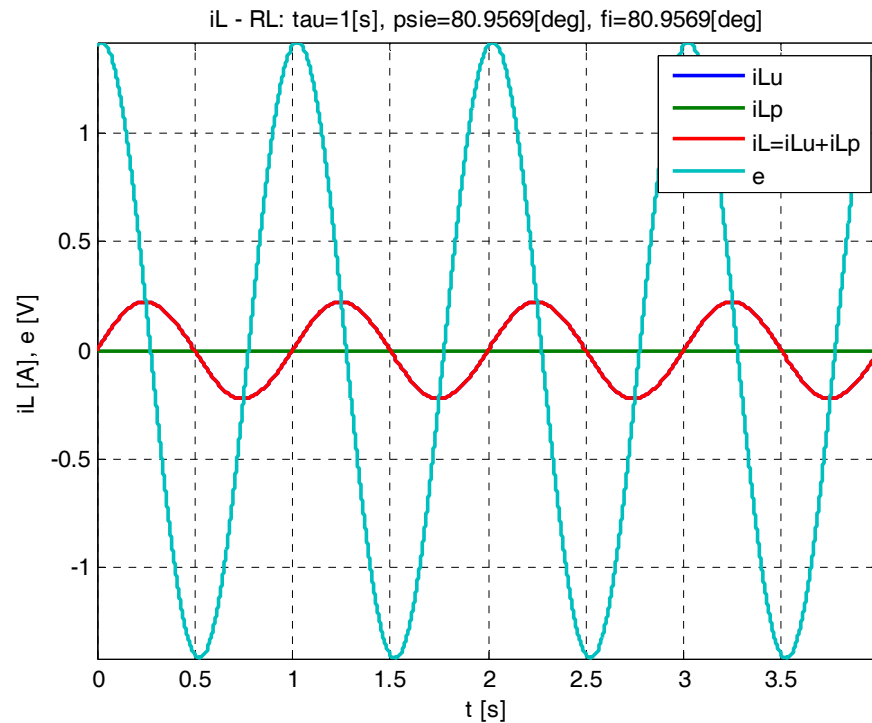


$$f = 1\text{Hz}, \omega = 2\pi\text{rad} / \text{s}$$

$$R = 1\Omega, L = 1\text{H}, X_L = 2\pi\Omega, \varphi = \arctg(X_L / R) = 81^\circ$$

$$e(t) = \sqrt{2} \sin(2\pi \cdot 1 \cdot t + \pi \cdot 81 / 180), \psi_e = 81^\circ$$

$$\tau = L / R = 1\text{s}$$



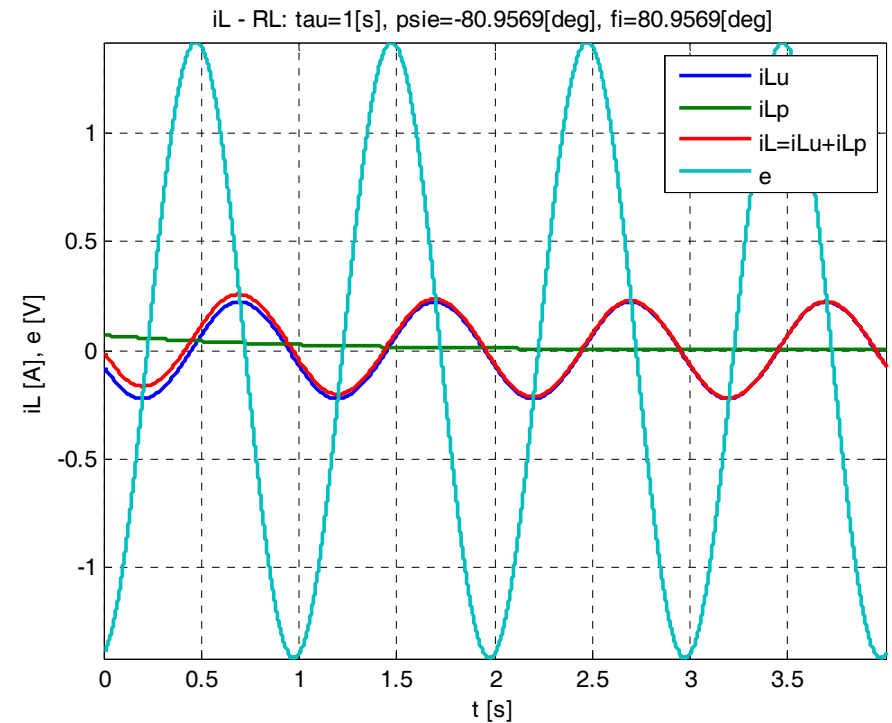
$$I_{Lum} = 0.2223\text{A}, i_{Lmax} = 0.2223\text{A}, k_i = 1$$

$$f = 1\text{Hz}, \omega = 2\pi\text{rad} / \text{s}$$

$$R = 1\Omega, L = 1\text{H}, X_L = 2\pi\Omega, \varphi = \arctg(X_L / R) = 81^\circ$$

$$e(t) = \sqrt{2} \sin(2\pi \cdot 1 \cdot t - \pi \cdot 81 / 180), \psi_e = -81^\circ$$

$$\tau = L / R = 1\text{s}$$



$$I_{Lum} = 0.2223\text{A}, i_{Lmax} = 0.2566\text{A}, k_i = 1.1545, t_m = 0.6959\text{s}$$

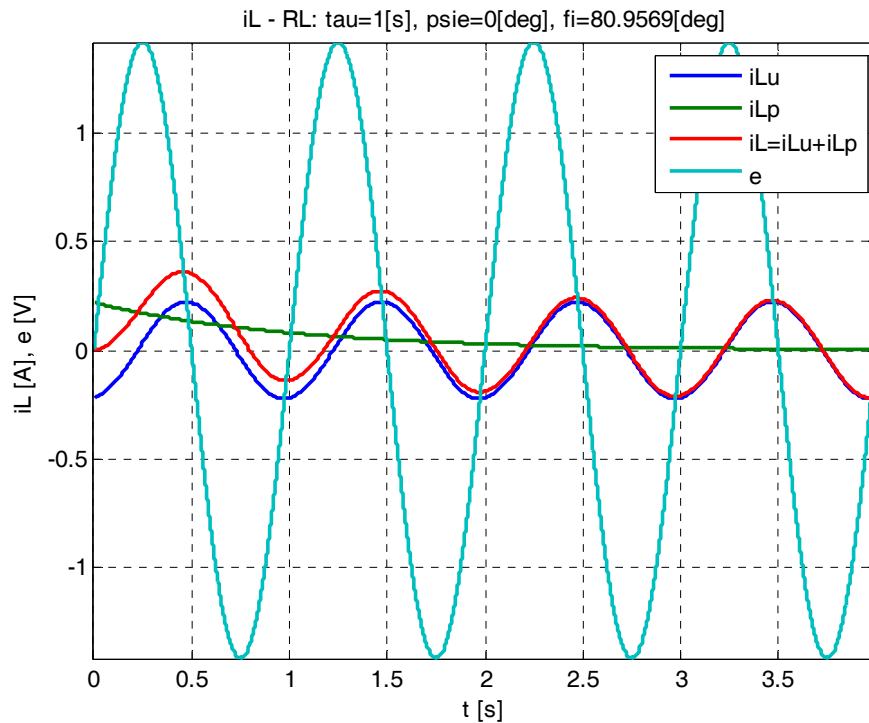


$$f = 1\text{Hz}, \omega = 2\pi\text{rad} / \text{s}$$

$$R = 1\Omega, L = 1\text{H}, X_L = 2\pi\Omega, \varphi = \arctg(X_L / R) = 81^\circ$$

$$e(t) = \sqrt{2} \sin(2\pi \cdot 1 \cdot t + 0), \psi_e = 0^\circ$$

$$\tau = L / R = 1\text{s}$$



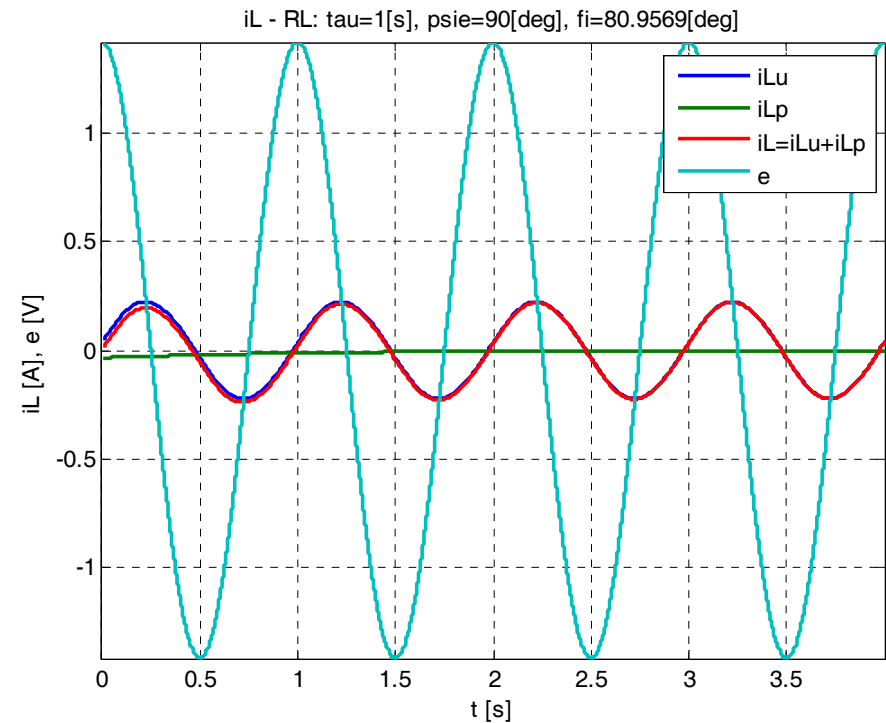
$$I_{Lum} = 0.2223\text{A}, i_{Lmax} = 0.3599\text{A}, k_i = 1.6191, t_m = 0.4591\text{s}$$

$$f = 1\text{Hz}, \omega = 2\pi\text{rad} / \text{s}$$

$$R = 1\Omega, L = 1\text{H}, X_L = 2\pi\Omega, \varphi = \arctg(X_L / R) = 81^\circ$$

$$e(t) = \sqrt{2} \sin(2\pi \cdot 1 \cdot t + \pi / 2), \psi_e = 90^\circ$$

$$\tau = L / R = 1\text{s}$$



$$I_{Lum} = 0.2223\text{A}, i_{Lmax} = 0.2392\text{A}, k_i = 1.0762, t_m = 0.7230\text{s}$$



Podane powyżej rozważania można opisać matematycznie formułując następujące zagadnienie:

Przy przyjęciu chwili załączenia $t=0$, będziemy poszukiwać takiej fazy początkowej napięcia zasilającego $\psi_e = \psi_m$, przy której prąd w stanie nieustalonym osiągnie wartość największą z możliwych. Z matematycznego punktu widzenia musimy zatem zbadać ekstrema funkcji $i_L(t, \psi_e)$, ze względu na ψ_e , czyli miejsca zerowe pochodnej cząstkowej:

$$\frac{\partial i_L(t, \psi_e)}{\partial \psi_e} = 0$$

Dla odnalezionej z powyższego równania fazy początkowej napięcia zasilającego, w następnym kroku poszukiwać będziemy chwili czasowej $t=t_m$ tj. czasu od momentu komutacji $t_0=0$ po którym $i_L(t, \psi_e = \psi_m)$ osiągnie ową wartość maksymalną, czyli czas przetężenia. To zaś wymaga zbadania ekstremum funkcji ze względu na zmienną czasową:

$$\frac{\partial i_L(t, \psi_e)}{\partial t} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial i_L(t, \psi_e)}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial i_L(t, \psi_e)}{\partial \psi_e} = 0 \end{cases} \Rightarrow \psi_e = \psi_m, t = t_m$$

Wykazaliśmy, że prąd w stanie nieustalonym w obwodzie odbiornika RL $i_L(t)$, przy ustalonym napięciu zasilającym $(E_m \omega, \psi_e)$, zależy od relacji pomiędzy parametrami R, L, które bezpośrednio wpływają na stałą czasową obwodu L/R oraz na fazę φ :

$$i_L(t) = \frac{E_m}{Z} \left(\sin(\omega t + \psi_e - \varphi) - \sin(\psi_e - \varphi) e^{-\frac{R}{L}t} \right), \text{ dla } t > 0$$

Otrzymamy:

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial i_L(t, \psi_e)}{\partial t} \right|_{\substack{t=t_m \\ \psi_e=\psi_m}} = \frac{E_m}{Z} \left[\omega \cos(\omega t_m + \psi_m - \varphi) + \frac{R}{L} \sin(\psi_m - \varphi) e^{-\frac{R}{L}t_m} \right] = 0 \\ \left. \frac{\partial i_L(t, \psi_e)}{\partial \psi_e} \right|_{\substack{t=t_m \\ \psi_e=\psi_m}} = \frac{E_m}{Z} \left[\cos(\omega t_m + \psi_m - \varphi) - \cos(\psi_m - \varphi) e^{-\frac{R}{L}t_m} \right] = 0 \end{cases}$$



Przekształcając:

$$\begin{cases} \omega \cos(\omega t_m + \psi_m - \varphi) = -\frac{R}{L} \sin(\psi_m - \varphi) e^{-\frac{R}{L} t_m} \\ \cos(\omega t_m + \psi_m - \varphi) = \cos(\psi_m - \varphi) e^{-\frac{R}{L} t_m} \end{cases}$$

Po podzieleniu stronami oraz wykorzystaniu własności trygonometrycznych funkcji tangens:

$$\omega = -\frac{R}{L} \operatorname{tg}(\psi_m - \varphi) \Rightarrow -\frac{\omega L}{R} = \operatorname{tg}(\psi_m - \varphi) \Rightarrow -\operatorname{tg}(\varphi) = \operatorname{tg}(\psi_m - \varphi) \Rightarrow \operatorname{tg}(-\varphi) = \operatorname{tg}(\psi_m - \varphi)$$

$$\psi_m - \varphi = -\varphi + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

$$\psi_m = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

WNIOSEK: Największe wartości przetężenia w obwodzie RL załączanym na napięcie sinusoidalne jest osiągana kiedy komutacja nastąpi dokładnie w chwili przejścia napięcia zasilającego przez zero.

Na przykład dla $\psi_e = \psi_m = 0 \cdot \pi = 0$ prąd w obwodzie:

$$i_L(t) \Big|_{\psi_e=0} = \frac{E_m}{Z} \left[\sin(\omega t - \varphi) + e^{-\frac{R}{L} t} \sin(\varphi) \right]$$

Obwód przejdzie w stan pracy ustalonej po komutacji bez przetężenia jeśli $\psi_e = \varphi$:

$$i_L(t) \Big|_{\psi_e=\varphi} = \frac{E_m}{Z} \left[\sin(\omega t) \right]$$

