

## DYNAMIKA MASZYN

- Podstawy dynamiki;
- Modelowanie układów mechanicznych;
- Parametry dynamiczne układów mechanicznych;
- Redukcja układów mechanicznych;
- Układanie równań ruchu układów mechanicznych;
- Charakterystyki dynamiczne;
- Silniki elektryczne;
- Nierównomierność biegu maszyny;
- Synteza układów mechanicznych.

## Dynamika Maszyn

### Podstawy dynamiki

#### Literatura:

- Borkowski W., Konopka S., Prochowski L.: Dynamika maszyn roboczych. WNT Warszawa 1996.
- Erdman A.G, Sandor G.N.: Mechanism Design. Analysis and Synthesis. Vol. I, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 07458 1997.
- Garbacz A.: Studium projektowania układów hydraulicznych. Ossolineum, Kraków 1887.
- Red. Garbacz A.: Kierunki rozwoju napędu hydraulicznego i konstrukcji maszyn roboczych. Fluid Power Net Publication. Kraków 1999.
- Krodziewski J.M.: Dynamics of machines. The University of Melbourne 2005.
- Marchelek K.: Dynamika obrabiarek. WNT Warszawa, 1991.
- Morecki A., Oderfeld J.: Teoria maszyn i mechanizmów. PWN, Warszawa 1987.
- Morel J.: Drgania maszyn i diagnostyka ich stanu technicznego. Polskie Towarzystwo Diagnostyki Technicznej, Warszawa, 1994.
- Osiński Z.: Teoria drgań. PWN Warszawa 1978.
- Red. Osiński Z.: Zbiór zadań z teorii drgań. PWN Warszawa 1989.
- Parszewski Z.: Drgania i dynamika maszyn. WNT Warszawa 1982.
- Praca zbiorowa: Elektrotechnika i elektryka dla nieelektryków. WNT Warszawa 1999.
- Ziemia S.: Analiza Drgań, PWN Warszawa, 1959.

Dynamika jest działem mechaniki zajmującym się badaniem ruchu układu ciał materialnych wywołanych działaniem zewnętrznego wymuszenia. W mechanice podstawowymi zasadami, na których opiera się dynamika są zasady Newtona.

Maszyna jest urządzeniem stanowiącym układ połączonych ze sobą ciał, o ściśle określonym ruchu, którego zadaniem jest wykonanie pracy użytecznej lub przekształcenie energii. Ze względu na efekt energetyczny maszyny można podzielić na:

- Maszyny robocze (obrabiałki, maszyny transportowe itd.), których zadaniem jest wykonanie pracy użytecznej, idącej na pokonanie oporu użytecznego związanego ze zmianą kształtu i wymiaru lub położenia ciała.
- Silniki i generatory, których zadaniem jest przekształcenie energii.



PHILOSOPHIÆ  
NATURALIS  
PRINCIPIA  
MATHEMATICA

IMPRIMATUR  
LONDINI  
Die 7. Martij 1687.

PHILOSOPHIÆ  
NATURALIS  
PRINCIPIA  
MATHEMATICA

AVCTOR  
ISACCO NEWTONO,  
Regio Angliæ Mathematico

Revisit & Approbat. Astronomi & Philosophici

PHILOSOPHIÆ  
NATURALIS  
PRINCIPIA  
MATHEMATICA

PHILOSOPHIÆ  
NATURALIS  
PRINCIPIA  
MATHEMATICA

#### Pierwsza zasada dynamiki:

Punkt materialny, na który nie działa żadna siła, pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym po linii prostej.

#### Druga zasada dynamiki:

Przyspieszenie punktu materialnego jest proporcjonalne do siły działającej na ten punkt, a kierunek przyspieszenia jest taki sam jak kierunek działania siły.

$$F = m \frac{dv}{dt}$$

W przypadku, gdy na punkt materialny działa kilka sił, wówczas kierunek przyspieszenia jest sumą geometryczną wszystkich działających sił, zarówno czynnych jak również biernych, będących reakcją więzów nałożonych na układ. Działanie jednego ciała na inne przejawia się poprzez oddziaływanie wzajemne. Tego typu oddziaływanie Newton sformułował w trzeciej zasadzie dynamiki.

#### Trzecia zasada dynamiki:

Siły wzajemnego oddziaływania dwóch punktów materialnych, są równe co do wartości bezwzględnej i są przeciwnie skierowane wzdłuż prostej łączącej oba punkty.

### AXIOMATA SIVE LEGES MOTUS

Lex I.

Corpus, cuius profectus in fura fit quiescent vel movetur uniformiter in directum, non quiescit vel movetur uniformiter in directum, nisi fuerit alicuius impetus continui actionis.

Potestatem profectus in motu suo non quiescit vel movetur uniformiter in directum, nisi fuerit alicuius impetus continui actionis. Tamen, corpus potest moveri per se vel alicuius impetus continui actionis. Motus autem Planetarum h. Continentium corpora motu suo non quiescit vel movetur uniformiter in directum, nisi fuerit alicuius impetus continui actionis.

Lex II.

Motus autem corporum per se vel alicuius impetus continui actionis non quiescit vel movetur uniformiter in directum, nisi fuerit alicuius impetus continui actionis.

Si corpus datur tempore, videtur M. Motus ab A ad B, h. v. si d. M. ab A ad C, complexus per se vel alicuius impetus continui actionis non quiescit vel movetur uniformiter in directum, nisi fuerit alicuius impetus continui actionis. Si corpus datur tempore, videtur M. Motus ab A ad B, h. v. si d. M. ab A ad C, complexus per se vel alicuius impetus continui actionis non quiescit vel movetur uniformiter in directum, nisi fuerit alicuius impetus continui actionis.

Lex III.

Si corpus datur tempore, videtur M. Motus ab A ad B, h. v. si d. M. ab A ad C, complexus per se vel alicuius impetus continui actionis non quiescit vel movetur uniformiter in directum, nisi fuerit alicuius impetus continui actionis.

Rys.3. Oryginalne praw Newtona z pracy Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica

**Siła czynna** – siła przyłożona, siła aktywna; wszelka siła zdolna do wywołania przyspieszonego ruchu lub do odkształcenia ciała.

**Siła bierna** – reakcja, siła reakcji więzów; pochodząca od tych ciał, które ograniczają swobodę ruchu rozpatrywanego ciała.

**Siła zewnętrzna** – siła oddziaływania na rozpatrywany (wydzielony) układ od strony ciał nie należących do tego układu; siła oddziaływania otoczenia na rozpatrywany układ.

**Siła wewnętrzna** – siła, z jaką punkt (ciało) układu mechanicznego działa na inny punkt (ciało) tego samego układu; zgodnie z prawem akcji i reakcji siły wewnętrzne działają zawsze parami, są sobie równe i mają przeciwne zwroty, a więc równoważą się.

**Siła bezwładności** – opór bezwładności, reakcja kinetyczna, siła d'Alemberta; siła pozorna (pomyślana, fikcyjna) określona w ruchu postępowym – iloczynem masy  $m$  przez przyspieszenie  $a$  ze znakiem przeciwnym, a w ruchu obrotowym iloczynem momentu bezwładności przez przyspieszenie kątowe ze znakiem przeciwnym

$$\vec{P}_b = -m\vec{a}; \quad \vec{M}_b = -J\vec{\epsilon};$$

**Siła uogólniona** – wielkość, której pomnożenie przez przygotowany przyrost współrzędnej uogólnionej  $\delta q$  daje wartość pracy  $\delta L$  na drodze określonej tym przyrostem

$$Q\delta q = \delta L$$

Dla przemieszczeń uogólnionych wyrażonych w jednostkach długości (przemieszczeń translacyjnych) siłę uogólnioną wyraża się w jednostkach siły (N), a dla przemieszczeń kątowych (rotacyjnych) [rad] siłą uogólnioną jest moment [Nm].

**Pęd** – ilość ruchu; wektorowa wielkość dynamiczna charakteryzująca ruch postępowy ciał materialnych

$$\vec{H} = \sum_{j=1}^N m_j \vec{v}_j$$

**Twierdzenie o pochodnej pędu.** Pochodna względem czasu pędu układu punktów materialnych równa się geometrycznej sumie wszystkich sił zewnętrznych (czynnych i biernych) działających na ten układ

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{P}_e \quad \text{lub} \quad \vec{P}_e = \dot{\vec{H}}$$

**Kręt** – moment pędu, moment kinetyczny; wektorowa wielkość dynamiczna charakteryzująca ruch ciał materialnych

$$\vec{K} = \sum_{j=1}^N (\vec{r}_j \times m_j \vec{v}_j)$$

gdzie:  $\vec{r}_j$  – promień wektor określający położenie punktu materialnego o masie  $m_j$  względem początku układu współrzędnych.

Kręt ciała sztywnego obracającego się z prędkością kątową  $\vec{\omega}$  wokół jednej z głównych osi bezwładności wyraża się wzorem

$$\vec{K} = J\vec{\omega}$$

gdzie:  $J$  – moment bezwładności względem osi obrotu ciała.

**Twierdzenie o pochodnej krętu.** Pochodna względem czasu krętu układu punktów materialnych, wyznaczonego względem dowolnego nieruchomego punktu O (bieguna), równa się geometrycznej sumie momentów względem tego punktu (bieguna) wszystkich sił zewnętrznych działających na punkty materialne rozpatrywanego układu

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \sum_{k=1}^N (\vec{r}_k \times \vec{P}_{ek}) = \sum_{k=1}^N \vec{M}_{Ok}$$

## Dynamika Maszyn

### Modelowanie układów mechanicznych

**Model** – układ (abstrakcyjny, stosunkowo prosty) uznany za wystarczająco podobny (izomorficzny, analogiczny) pod jakimś względem do układu (rzeczywistego lub projektowanego) będącego właściwym przedmiotem badania, ułatwiający poznanie cech badanego układu; tworząc model, przyjmuje się jako przedmiot badań wybrane własności badanego obiektu.

**Model funkcjonalny** (fenomenologiczny) – model imitujący działanie badanego układu; model funkcjonalny przedstawiony na rysunku w postaci zbioru umownych symboli jest nazywany schematem funkcjonalnym, np. schemat kinematyczny, hydrauliczny lub elektryczny.

**Model fizyczny** – model imitujący badany układ pod względem wybranych własności i właściwości fizycznych; model imitujący własności i właściwości dynamiczne nazywa się **modelem dynamicznym**.

**Model matematyczny** – opis matematyczny, najczęściej w postaci równań (różniczkowych lub całkowych) opisujących zachowanie się badanego układu w różnych stanach; model matematyczny można uzyskać dwoma sposobami: wykorzystując prawa fizyczne – czyli analitycznie, lub eksperymentalnie – czyli przez identyfikację.

**Modele dynamicznie ciągłe** są to modele UM o ciągłym rozkładzie mas, o nieskończonej liczbie stopni swobody, np. układy belkowe, płytowe i powłokowe; modele te opisuje się równaniami różniczkowymi cząstkowymi.

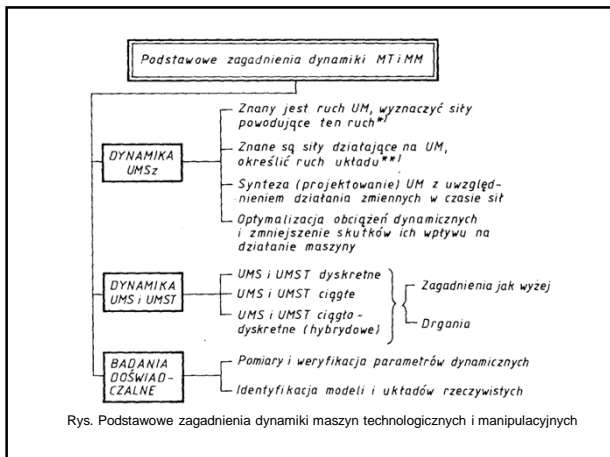
**Modele dynamicznie dyskretnie** są to modele UM o parametrach skupionych (punktowy rozkład mas i elementów sprężysto-tłumiących), o skończonej liczbie stopni swobody; modele te opisują równania różniczkowe zwyczajne.

**Założenia upraszczające** – eliminacje myślowe tych elementów, cech i relacji występujących wewnątrz badanego układu oraz między układem i otoczeniem, które są nieistotne dla danego celu lub na danym etapie badań.

**Model cybernetyczny** – schemat blokowy, schemat układu z zaznaczeniem podziału na czony funkcjonalne z uwzględnieniem ich własności dynamicznych, przedstawiających oddziaływania między tymi członami (relacje między wejściami i wyjściami).

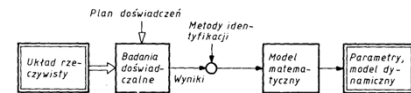
**Układ mechaniczny** (UM) – wyodrębniony zbiór ciał, ciało lub część ciała, którego ruch mechaniczny jest przedmiotem badań; W zależności od branych pod uwagę i rzeczywistych właściwości modelowanych rozróżnia się:

- złożone z elementów sztywnych (UMSz),
- złożone z elementów masowo-sprężystych (UMS),
- złożone z elementów masowo-sprężysto-tłumiących (UMST).

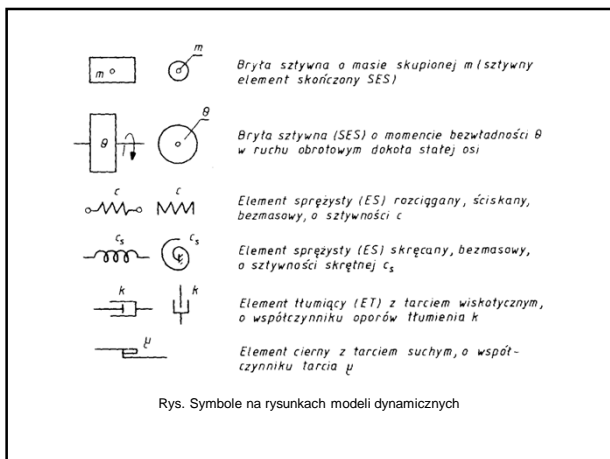


**ANALIZA TEORETYCZNA** układu istniejącego lub **PROJEKTOWANIE** nowego układu: model funkcjonalny — model fizyczny dynamiczny — model matematyczny — rozwiązanie modelu matematycznego — analiza i interpretacja wyników — wnioski do konstrukcji i eksploatacji.

**IDENTYFIKACJA** układu rzeczywistego: plan doświadczeń (przyjęcie modelu doświadczalnego badanego układu rzeczywistego) — przeprowadzenie doświadczeń — opracowanie wyników doświadczeń — wyznaczenie parametrów układu — matematyczny model układu — porównanie modelu doświadczalnego z modelem teoretycznym (identyfikacja) i wprowadzenie korekt do modelu teoretycznego.



Rys. Tok postępowania w rozwiązywaniu zagadnienia identyfikacji układu rzeczywistego



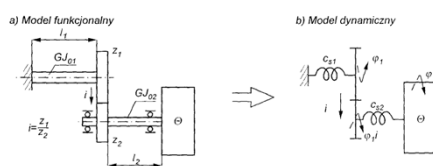
W modelowaniu najczęściej stosuje się następujące przybliżenia techniczne, które okazują się przydatne i nadają się do stosowania w różnym stopniu i w różnych zagadnieniach:

- pomijanie czynników mających mały wpływ,
- upraszczanie kształtów geometrycznych analizowanego układu,
- założeniu jednorodności materiału, poszczególnych elementów analizowanego układu,
- zastępowanie parametrów rozłożonych w sposób ciągły, parametrami skupionymi,
- przyjęcie pewnych elementów, rozpatrywanego modelu jako nieważkich,
- przyjęcie pewnych elementów rozpatrywanego modelu jako brył idealnie sztywnych,
- założenie, że modelowany układ nie powoduje zmian w otaczającym go środowisku,
- założenie (w miarę możliwości) prostych liniowych zależności między zmiennymi fizycznymi opisującymi przyczyny i skutki,
- założenie, że parametry fizyczne nie są funkcjami czasu,
- unikanie nieokreśloności i pomijanie szumów,

- zastąpienie procesów stochastycznych, jakie zachodzą w układzie rzeczywistym, procesami zdeterminowanymi.

#### PRZYKŁAD 1

Dany jest UM przekładni zębatej walcowej, w którym moment bezwładności  $\theta$  jest dużo większy od sumy momentów bezwładności wałów i kół zębatych. Znane są własności sprężyste wałów (długości  $l$ , momenty bezwładności przekrojów  $J$  oraz moduł sprężystości postaciowej  $G$ ).



Rys. Model przekładni pasowej a) funkcjonalny, b) dynamiczny

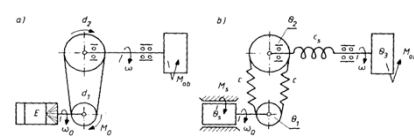
W modelu dynamicznym występują:

- jedno ciało o momencie bezwładności  $\theta$  (pominięto momenty bezwładności kół zębatych i wałów),
- dwie skręcanie sprężyny, zastępujące wały, o sztywnościach skrętnych:

$$c_{s1} = \frac{GJ_{01}}{l_1} \quad \text{i} \quad c_{s2} = \frac{GJ_{02}}{l_2}$$

Układ zastępczy ma dwa stopnie swobody ruchu, określone przemieszczeniami kątowymi  $\varphi$  i  $\varphi_1$ . Kąt obrotu koła z2 jest związany z kątem obrotu  $\varphi_1$  przełożeniem i przekładnią zębatej.

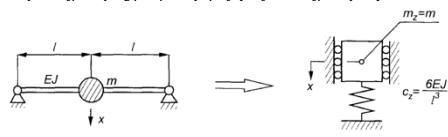
#### PRZYKŁAD 2



Rys. Model pasowego napędu wrzeciona a) funkcjonalny, b) dynamiczny

**PRZYKŁAD 3**

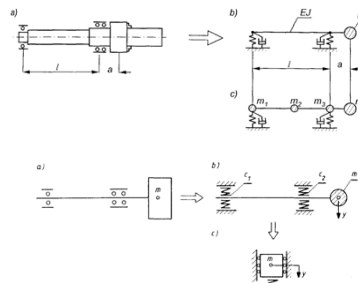
UM belki dwupodporowej, której masa jest pomijalnie mała w stosunku do masy skupionej umieszczonej w środku belki, sprowadza się do UMZ masy skupionej zastępczej  $m_z$  podpartej sprężyną o zastępczej sztywności



Rys. Model belki dwupodporowej a) funkcjonalny, b) dynamiczny

**PRZYKŁAD 4**

Na rysunku przedstawiono modele zespołu wrzeciona dwupodporowego: a) model funkcjonalny, b) model dynamiczny jednomasowy, c) model dynamiczny wielomasowy (dokładniejszy)



Rys. Model wrzeciona obrabiarki a) funkcjonalny, b) dynamiczny dwupodporowy, c) dynamiczny zastępczy

## Dynamika Maszyn

### Parametry dynamiczne układów mechanicznych

Parametry dynamiczne to określone liczbowo wielkości fizyczne, charakteryzujące układ mechaniczny, potrzebne do matematycznego opisu stanów dynamicznych układów. Są to więc parametry: inercyjne, sztywnościowe i dysypacyjne.

**Parametry inercyjne**

Masa – wielkość fizyczna (własność), charakteryzująca bezwładność, czyli zdolność do przeciwstawiania się zmianom prędkości ciała materialnego w ruchu postępowym; w mechanice klasycznej masa jest uznawana za wielkość stałą (prawo zachowania masy).

Znając objętość  $V$  i gęstość  $\rho$  ciała jednorodnego, masę oblicza się ze wzoru:

$$m = V\rho$$

Gęstości ważniejszych materiałów konstrukcyjnych stosowanych w budowie maszyn są następujące [kg/m<sup>3</sup>]:

Stal	7800	Brąz Al	7400 ÷ 7600
Żeliwo	7250	Brąz Sn	8500 ÷ 8900
Aluminium	2700	Brąz Pb	8900 ÷ 9000
Mosiądz	8400	Ołów	11340
Miedź	8960	Korund	3100 ÷ 3200
Złoto	19320	Stop cynku	6600

**Moment bezwładności względem osi** — wielkość fizyczna (skalarna) charakteryzująca bezwładność ciała w ruchu obrotowym dookoła danej osi; matematycznie moment bezwładności względem osi jest określony wzorami

$$\Theta = \sum_{i=1}^n r_i^2 m_i \quad \text{lub} \quad \Theta = \int r^2 dm \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2]$$

gdzie:  $m_i, dm$  — elementarna masa,  
 $r_i, r$  — odległość masy elementarnej od osi.

**Moment bezwładności odśrodkowy** — moment dewiacji; moment bezwładności określony w prostokątnym układzie współrzędnych Oxyz wzorami:

$$D_{xy} = \int xy dm; \quad D_{xz} = \int xz dm; \quad D_{yz} = \int yz dm$$

**Twierdzenie Steinera-Eulera:** moment bezwładności względem dowolnej osi równa się momentowi bezwładności ciała względem osi równoległej przechodzącej przez środek masy ciała plus iloczyn masy  $m$  tego ciała przez kwadrat odległości  $c$  między tymi osiami

$$\Theta = \Theta_c + m c^2$$

### Momenty bezwładności ciał jednorodnych

Nazwa i szkic ciała	Moment bezwładności	Nazwa i szkic ciała	Moment bezwładności
Cienki pręt prosty do osi	$\Theta_x = \frac{1}{3} m l^2$ $\Theta_y = \frac{1}{12} m l^2$	Prostopadłościan	$\Theta_x = \frac{1}{12} m (b^2 + h^2)$ $\Theta_y = \frac{1}{12} m (a^2 + h^2)$ $\Theta_z = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$
Cienki pręt nachylony względem osi	$\Theta_x = \frac{1}{3} m l^2 \sin^2 \alpha$	Walec	$\Theta_x = \Theta_y = \frac{1}{12} m (3r^2 + h^2)$ $\Theta_z = \frac{1}{2} m r^2$
Cienka płyta prostokątna	$\Theta_x = \frac{1}{12} m b^2$ $\Theta_y = \frac{1}{12} m h^2$ $\Theta_z = \frac{1}{12} m (b^2 + h^2)$	Kula	$\Theta_x = \Theta_y = \Theta_z = \frac{2}{5} m r^2$
Cienka płyta kołowa	$\Theta_x = \Theta_y = \frac{1}{4} m r^2$ $\Theta_z = \frac{1}{2} m r^2$	Pierścien o przekroju prostokątnym	$\Theta_x = \Theta_y = \frac{1}{12} m (R^2 + 3b^2 + 2h^2)$ $\Theta_z = m \left( R^2 + \frac{b^2}{4} \right)$

Klasyfikację przestrzennych brył układu mechanicznego można przeprowadzić z zależności analitycznych. Na ich podstawie, można określić czy daną bryłę zakwalifikować jako jednorodny prostopadłościan, czy jako cienką płytę. Cienka płyta ma trzy współmierne wymiary  $a$ ,  $b$  i grubość  $\delta$  o rząd mniejszy od wymiarów  $a$  oraz  $b$ .

$$\delta \leq \frac{a}{10} \quad \delta \leq \frac{b}{10} \quad (a)$$

Na podstawie zależności (a), kwalifikuje się prostopadłościan jako cienką płytę lub nie. W analogiczny sposób postępuje się w przypadku kwalifikowania bryły jako rura grubo, bądź cienkościenna

$$\delta \leq \frac{D}{10} \quad \delta \leq \frac{h}{10} \quad (b)$$

Metody doświadczalne wyznaczenia momentu bezwładności

- metoda wahadła fizycznego,
- metoda wahań skrętnych,
- metoda grawitacyjna.

#### Parametry sprężyste

**Sprężystość** jest właściwością ciał, polegającą na odkształcaniu się pod wpływem przyłożonych obciążeń zewnętrznych oraz na cofnięciu się tych odkształceń, czyli przywróceniu pierwotnego kształtu i wymiarów, po zaniku tych obciążeń.

**Szywność** jest to właściwość ciał sprężystych, polegająca na przeciwstawieniu się siłom wywołującym odkształcenia. Szywność elementów konstrukcyjnych określa się w stanach obciążeń statycznych lub quasi-statycznych (wolno narastających i wolno zanikających) i wyraża się współczynnikiem szywności  $c$ , nazywanym często krótko szywnością statyczną, określonym wzorem:

$$c = \frac{\text{Przyrost siły uogólnionej}}{\text{Przyrost odkształcenia}} = \left( \frac{\Delta Q}{\Delta \lambda} \right)_{Q_0} = \left( \frac{dQ}{d\lambda} \right)_{Q_0}$$

W zależności od rodzaju występujących odkształceń rozróżnia się: szywność na rozciąganie i ściskanie [N/m] szywność giętną [1N/m], skrętną [Nm/rad] i styczną [N/mm], którym w mechanice technicznej odpowiadają wskaźniki szywności  $EA$ ,  $EJ_x$  i  $GJ_o$

W przypadku prostych przekrojów elementów maszyn, do oszacowania wartości współczynników szywności oraz tłumienia wykorzystuje się zależności podane w metodzie sztywnych elementów skończonych (SES).

Sztywny element	Szywność	Sztywny element	Szywność
	$C = \frac{P}{\Delta l} = \frac{3EJ}{l^3}$		$C = \frac{P}{\Delta l} = \frac{48EJ}{l^3}$ $k = 1 - \frac{3}{16} \left( \frac{d}{D} \right)^4$
	$C = \frac{P}{\Delta l} = \frac{192EJ}{l^3}$		$C = \frac{M}{\Delta \varphi} = \frac{EJ}{l}$ $M = PR$ $l$ - długość sprężyny
	$C = \frac{P}{\Delta l} = \frac{AE}{l}$		$C = \frac{M}{\Delta \varphi} = \frac{EJ}{n \cdot l D}$
	Pierścien $C = \frac{P}{\Delta D} = 54 \frac{EJ}{D^3}$		$C = \frac{M}{\Delta \varphi} = \frac{GJ_o}{l}$
	Płyta kokowa $C = \frac{P}{\Delta l} = \frac{Eh^3}{l^3(1-\nu^2)}$		$C_1 = \frac{GJ_{o1}}{l_1}$ $C_2 = \frac{GJ_{o2}}{l_2}$ $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$

#### Parametry dysypacyjne

**Dysypacja energii** — rozpraszanie energii; proces nieodwracalnego powstawania energii cieplnej kosztem energii innych rodzajów.

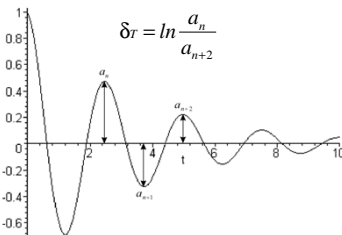
**Przyczyny dysypacji energii:** siły tarcia, opory przepływu cieczy, odkształcenia ciał sprężystych wykazujących histerezę odkształceniową (tarcia wewnętrzne w materiale), opór elektryczny, histereza magnetyczna.

**Siły dysypacyjne** — siły tarcia, siły hamujące ruch, siły tłumienia drgań; ogólnie siły występujące w czasie ruchu ciała w ośrodku (w cieczy, w powietrzu) lub w zetknięciu z innym ciałem, zwrócone przeciwnie do wektora prędkości względnej.

W jednej z definicji bierze się stosunek wartości bezwzględnych dwóch kolejnych ekstremalnych wychyleń.

$$\delta = \ln \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

W przypadku drugiej definicji, uwzględnia się stosunek wartości bezwzględnych dwóch różniących się o okres ekstremalnych wychyleń.



Rys. Graficzna identyfikacja wychyleń przebiegu drgań swobodnie tłumionych

Związek między tak określonymi dekrementami jest następujący

$$\delta_r = \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} + \ln \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} = \delta_1 + \delta_2$$

Jeżeli dekrement jest stały lub mało różni się w granicach jednego okresu, to

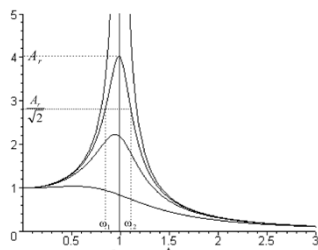
$$\delta_r = 2\delta$$

Inną metodą oszacowywania wartości tłumienia drgań, jest wykorzystanie współczynnika dobroci układu. Dobroć układu jest stosunkiem liniowego wiskotycznego współczynnika tłumienia do krytycznej wartości tego współczynnika

$$Q = \frac{b}{b_{cr}}$$

odwrotnością dobroci jest współczynnik strat,

$$\chi = Q^{-1} = \frac{b_{cr}}{b}$$



Rys. Charakterystyka amplitudowo częstotliwościowa, układu o jednym stopniu swobody

Współczynnik strat oblicza się z zależności

$$\chi = Q^{-1} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_{rec}}$$

Wartość współczynnika tłumienia wyznaczyć można z zależności

$$b = \frac{2c}{\omega_2 - \omega_1}$$

Współczynniki strat materiałów konstrukcyjnych

Materiał konstrukcyjny	Moduł Kirchhoffa	Współczynnik strat $Q^{-1}$
Stal 14HG	$1.079 \cdot 10^5$	$0.8 \cdot 10^{-3}$
Stal 15HGM	$0.883 \cdot 10^5$	$0.2 \cdot 10^{-3}$
Stal 18H2N4WA	$0.814 \cdot 10^5$	$0.2 \cdot 10^{-3}$
Stal H23N18	$0.824 \cdot 10^5$	$0.2 \cdot 10^{-3}$
Żelazo Armko	$0.932 \cdot 10^5$	$0.15 \cdot 10^{-3}$

Tłumienie drgań można określić także za pomocą współczynnika rozproszenia. Określamy go jako stosunek energii rozproszonej podczas jednego okresu do maksymalnej wartości energii w tym okresie

$$\psi = \frac{\Delta W}{W}$$

W układzie z liniową sprężystością istnieje prosty związek między tymi współczynnikami a dekrementem. Obwódka wykresu  $a = a(t)$  drgań tłumionych określa energię w układzie. Energia układu określona jest wzorem

$$W_i = c \frac{a^2(t)}{2}$$

gdzie  $c$  jest współczynnikiem sztywności układu. Stąd

$$\psi = - \int_{W_i}^{W_{i+1}} \frac{dW}{W} = - \int_{a_n}^{a_{n+2}} 2 \frac{da}{a} = 2 \ln \frac{a_{n+2}}{a_n} = 2\delta_r$$

Odpowiednio

$$\psi = 2(\delta_1 + \delta_2)$$

lub przy stałym

$$\psi = 4\delta$$

Pomiędzy tymi wielkościami zachodzą następujące zależności.

$$\begin{cases} Q_E^{-1} = \frac{\omega \eta}{E} & Q_G^{-1} = \frac{\omega \eta}{G} & Q^{-1} = \frac{\delta}{\pi} \\ b_{kr} = \frac{\eta}{2\pi} & \psi = 2\delta & T_{mE} = \frac{\eta}{E} & T_{mG} = \frac{\eta}{G} \end{cases}$$

Dla materiałów izotropowych, można zapisać wyrażenia przedstawiające stałe materiałowe tłumienia w funkcji pozostałych wielkości opisujących rozproszenie energii drgań.

$$\begin{cases} \eta = T_m E = \frac{Q^{-1} E}{\omega_{rec}} = \frac{\delta E}{\pi \omega_{rec}} = \frac{2b_{kr} E}{\omega_{rec}} = \frac{\psi E}{2\pi \omega_{rec}} \\ \bar{\eta} = T_m G = \frac{Q^{-1} G}{\omega_{rec}} = \frac{\delta G}{\pi \omega_{rec}} = \frac{2b_{kr} G}{\omega_{rec}} = \frac{\psi G}{2\pi \omega_{rec}} \end{cases}$$

Stale czasowe tłumienia wewnętrznego

Materiał	$T_m$	Materiał	$T_m$
Stal St3	$10 \cdot 10^{-6}$	Żeliwo zwykłe	$324 \cdot 10^{-6}$
Stal 50	$30.3 \cdot 10^{-6}$	Żelazobeton	$1200 \cdot 10^{-6}$
Stal 37HN3A	$11.2 \cdot 10^{-6}$	Guma	$1300 \cdot 10^{-6}$

Znając stałą czasową tłumienia oraz współczynnik sztywności, można obliczyć współczynnik tłumienia elementu sprężysto tłumiącego, opisanego modelem Kelvina Voita.

$$b_i = T_m c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Rodzaj łożyska	$T_m$
Łożysko kulkowe jednorzędowe	$3.2 \cdot 10^{-6}$
Dwa obok siebie łożyska kulkowe jednorzędowe	$4.1 \cdot 10^{-6}$
Łożysko wałeczkowe jednorzędowe	$6 \cdot 10^{-6}$
Łożysko stożkowe	$4.5 \cdot 10^{-6}$
Łożysko wałeczkowe dwurzędowe	$3.4 \cdot 10^{-6}$
Łożysko kulkowe promieniowe oraz łożysko kulkowe wzdłużne	$11 \cdot 10^{-6}$

# Dynamika Maszyn

## Redukcja układów mechanicznych

**Układ mechaniczny zastępczy (UMZ)** — układ mechaniczny będący uproszczonym modelem fizycznym rzeczywistego układu i stanowiący podstawę matematycznego opisu ruchu tego układu; wybór układu zastępczego zależy od argumentów uzasadniających z jednej strony korzyści wynikające z prostoty modelu, a z drugiej — możliwą do otrzymania dokładność wyników.

**Układ mechaniczny zredukowany (UMR)** — układ mechaniczny uproszczony w stosunku do układu zastępczego, lecz równoważny mu pod względem dynamicznym, tzn. spełniający określone warunki redukcji; układy zredukowane wprowadza się dla ułatwienia opisu matematycznego.

**Człon redukcji** — człon mechanizmu wykonujący ruch postępowy, obrotowy lub złożony, do którego dokonuje się redukcji; jako człon redukcji przyjmuje się zwykle człon napędzający mechanizm (człon pierwszy), a czasem wygodnie jest redukować do członu wykonawczego (np. wrzeciona, stołu, suportu).

**Redukcja mas** polega na zastąpieniu mas redukowanych (skupionych i rozłożonych) jedną masą (skupioną lub rozłożoną) związaną z członem redukcji, której energia kinetyczna w każdej chwili ruchu jest równa sumie energii kinetycznej mas redukowanych.

Z porównania energii kinetycznych otrzymuje się wyrażenia:  
— dla masy zredukowanej

$$m_{red} = \sum_{i=1}^k \left[ m_i \left( \frac{v_i}{v_x} \right)^2 + \Theta_i \left( \frac{\omega_i}{\omega_x} \right)^2 \right],$$

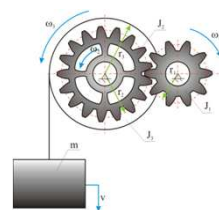
— dla zredukowanego momentu bezwładności

$$\Theta_{red} = \sum_{i=1}^k \left[ m_i \left( \frac{v_i}{\omega_x} \right)^2 + \Theta_i \left( \frac{\omega_i}{\omega_x} \right)^2 \right],$$

gdzie:

- $m_i, \Theta_i$  — masy i momenty bezwładności redukowanych członów,
- $v_i$  — prędkość środka masy i-tego członu,
- $v_x$  — prędkość środka masy zredukowanej,
- $\omega_i$  — prędkość kątowa i-tego członu,
- $\omega_x$  — prędkość kątowa członu, do którego redukujemy masę.

**PRZYKŁAD 1.** Dla układu przedstawionego na rysunku należy zredukować masowe momenty bezwładności na koło zębate o promieniu  $r_1$ . W zadaniu, dane są bezwładności ( $m, J_1, J_2, J_3$ ), promienie kół zębatach ( $r_1, r_2$ ) oraz bębna ( $r_3$ ) oraz prędkość kątowa silnika napędzającego ( $\omega_1$ ).



Rys. Model mechanizmu podnoszenia suwnicy pomostowej

Zredukowany na koło zębate o promieniu  $r_1$  masowy moment bezwładności dany jest zależnością.

$$J_{red} = m \left( \frac{v}{\omega_{red}} \right)^2 + J_1 \left( \frac{\omega_1}{\omega_{red}} \right)^2 + J_2 \left( \frac{\omega_2}{\omega_{red}} \right)^2 + J_3 \left( \frac{\omega_3}{\omega_{red}} \right)^2$$

W rozpatrywanym przypadku prędkość redukcji dana jest zależnością.

$$\omega_{red} = \omega_1$$

Prędkości poszczególnych elementów mechanizmu podnoszenia dane są:

$$\omega_2 = \frac{r_1}{r_2} \omega_{red}, \quad \omega_3 = \omega_2 = \frac{r_1}{r_2} \omega_{red}$$

$$v = \omega_3 r_3 = \frac{r_1 r_3}{r_2} \omega_{red}$$

Ostatecznie zależność na moment bezwładności zredukowany na koło zębate o promieniu  $r_1$  przyjmuje postać.

$$J_{red} = m \left( \frac{r_1 r_3}{r_2} \right)^2 + J_1 + J_2 \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 + J_3 \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2$$

**PRZYKŁAD 2.** Dla układu przedstawionego na rysunku należy zredukować masowe momenty bezwładności na podnoszony ładunek.

Zredukowany na koło zębate o promieniu  $r_1$  masowy moment bezwładności dany jest zależnością.

$$m_{red} = m \left( \frac{v}{v_{red}} \right)^2 + J_1 \left( \frac{\omega_1}{v_{red}} \right)^2 + J_2 \left( \frac{\omega_2}{v_{red}} \right)^2 + J_3 \left( \frac{\omega_3}{v_{red}} \right)^2$$

W rozpatrywanym przypadku prędkość redukcji dana jest zależnością.

$$v_{red} = v$$

Prędkości poszczególnych elementów mechanizmu podnoszenia dane są:

$$\omega_1 = \frac{v_{red}}{r_3}, \quad \omega_2 = \omega_1 = \frac{v_{red}}{r_3}, \quad \omega_3 = \frac{r_3}{r_1} \omega_1 = \frac{r_3}{r_1} \omega_2 = \frac{r_3}{r_1} \frac{v_{red}}{r_3}$$

Ostatecznie zależność na moment bezwładności zredukowany na koło zębate o promieniu  $r_1$  przyjmuje postać.

$$m_{red} = m + J_1 \left( \frac{r_3}{r_1} \right)^2 + J_2 \left( \frac{1}{r_1} \right)^2 + J_3 \left( \frac{1}{r_1} \right)^2$$

Redukcja mas belek o stałym przekroju poprzecznym do jednej masy skupionej. W tego rodzaju zagadnieniach zakłada się, że linia ugięcia belki podczas drgań (postać drgań) odpowiada statycznemu ugięciu belki pod działaniem obciążeń statycznych (metoda Rayleigha).

	$m_r = \frac{m l^3}{630 x^4 (l - x)^3}$ <p>Dla <math>x = 0,5l</math>: <math>m_r = \frac{128}{315} m</math>,</p> $c = \frac{48 E J}{x^3 (3l - 4x)}$ <p>Dla <math>x = 0,5l</math>: <math>c = \frac{192 E J}{l^3}</math></p>
	$\Theta_r = \frac{8 \Theta l^2}{15 x^2}, \quad c_r = \frac{\pi G d^4}{32 x}$ <p>Dla <math>x = l</math>: <math>\Theta_r = \frac{8 \Theta}{15}, \quad c_r = \frac{\pi G d^4}{32 l}</math></p>

Objaśnienia:

$m$  — masa belki,

$E$  — moduł sprężystości wzdłużnej,

$G$  — moduł sprężystości postaciowej,

$J$  — moment bezwładności przekroju poprzecznego przy zginaniu.

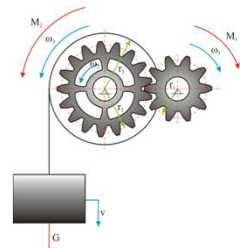
**Redukcja sił uogólnionych (sił i momentów sił).** Siłą  $P$  zredukowaną na kierunek  $x$  (momentem zredukowanym na kierunek  $x$ ) nazywamy taką siłę (taki moment siły), która przyłożona do członu redukcji daje moc chwilową równą sumie chwilowych mocy uogólnionych sił redukowanych. Stąd wynikają zależności:

$$P_{rx} = \sum_{i=1}^k P_i \frac{v_i \cos \alpha_i}{v_x} + \sum_{i=1}^k M_i \frac{\omega_i}{v_x},$$

$$M_{rx} = \sum_{i=1}^k P_i \frac{v_i \cos \alpha_i}{\omega_x} + \sum_{i=1}^k M_i \frac{\omega_i}{\omega_x},$$

gdzie:  $\alpha_i$  – kąt między siłą  $P_i$  i prędkością  $v_i$ .

**PRZYKŁAD 1.** Dla układu przedstawionego na rysunku należy zredukować siły oraz momenty na podnoszony ładunek. W zadaniu, dane są bezwładności ( $G$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ ), promienie kół zębatach ( $r_1$ ,  $r_2$ ) oraz bębna ( $r_3$ ) oraz prędkość kątowa silnika napędzającego ( $\omega_1$ ).



Zredukowana na podnoszony ładunek siła dana jest zależnością:

$$F_{red} = G \frac{v}{v_{red}} + M_1 \frac{\omega_1}{v_{red}} + M_2 \frac{\omega_2}{v_{red}}$$

Zredukowana prędkość przy redukcji siły mechanizmu podnoszenia do ładunku dana jest zależnością:

$$v_{red} = v$$

Prędkości poszczególnych elementów mechanizmu podnoszenia dane są:

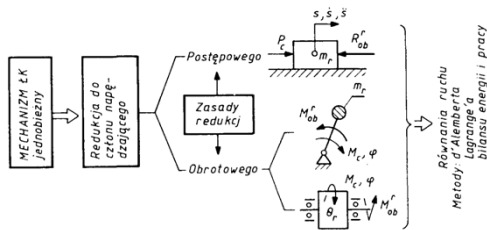
$$\omega_3 = \frac{v_{red}}{r_3}, \quad \omega_2 = \omega_3 = \frac{v_{red}}{r_3}$$

$$\omega_1 = \frac{r_3}{r_1} \omega_2 = \frac{r_3}{r_1 r_2} v_{red}$$

Ostatecznie zależność na siłę zredukowaną do ładunku przyjmuje postać:

$$F_{red} = G + M_1 \frac{r_3}{r_1 r_2} + M_2 \frac{1}{r_2}$$

Rys. Model mechanizmu podnoszenia suwnicy pomostowej



Rys. Redukcja mechanizmu lub łańcucha kinematycznego

**PRZYKŁAD 2.** Dla układu przedstawionego na rysunku należy zredukować siły oraz momenty na koło zębate o promieniu  $r_1$ .

Zredukowany na koło zębate o promieniu  $r_1$  moment dany jest zależnością:

$$M_{red} = G \frac{v}{\omega_{red}} + M_1 \frac{\omega_1}{\omega_{red}} + M_2 \frac{\omega_2}{\omega_{red}}$$

W rozpatrywanym przypadku prędkość redukcji, dana jest zależnością:

$$\omega_{red} = \omega_1$$

Prędkości poszczególnych elementów mechanizmu podnoszenia dane są:

$$\omega_2 = \frac{r_1}{r_2} \omega_{red}, \quad \omega_3 = \omega_2 = \frac{r_1}{r_2} \omega_{red}$$

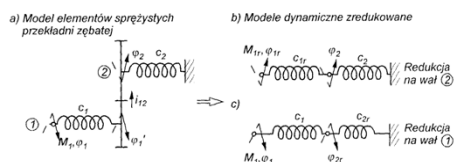
$$v = \omega_3 r_3 = \frac{r_1 r_3}{r_2} \omega_{red}$$

Ostatecznie zależność na moment siły zredukowany na koło zębate o promieniu  $r_1$  przyjmuje postać

$$M_{red} = G \frac{r_1 r_3}{r_2} + M_1 + M_2 \frac{r_1}{r_2}$$

**Redukcja sztywności** opiera się na zasadzie, że energia potencjalna elementów sprężystych układu mechanicznego sprężystego, wynikająca z przemieszczeń (postępowych i obrotowych) jego członów masowych, powinna być równa w każdej chwili ruchu energii potencjalnej elementów sprężystych zredukowanych.

**PRZYKŁAD 1.** Dokonać redukcji sztywności układu na wał 1 i 2.



Opierając się na tej zasadzie, w rozpatrywanym przykładzie (rys. a) otrzyma się:

— dla redukcji sztywności  $c_2$  na wał 1 (rys. c)

$$\frac{1}{2} c_{2r} \varphi_{2r}^2 = \frac{1}{2} c_2 \varphi_2^2 \Rightarrow c_{2r} = c_2 \left( \frac{\varphi_2 i_{12}}{\varphi_2} \right)^2 = c_2 i_{12}^2,$$

— dla redukcji sztywności  $c_1$  na wał 2 (rys. b)

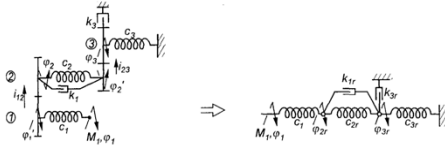
$$\frac{1}{2} c_{1r} (\varphi_{1r} - \varphi_2)^2 = \frac{1}{2} c_1 (\varphi_1 - \varphi_1')^2 \Rightarrow c_{1r} = \frac{c_1}{i_{12}^2}.$$

$$c_{1r} (\varphi_1 i_{12} - \varphi_1' i_{12})^2 = c_1 (\varphi_1 - \varphi_1')^2$$



**Redukcji oporów tłumienia** dokonuje się wg zasady, że moc tracona w elementach układu mechanicznego sprężysto-tłumiącego równa się w każdej chwili ruchowi mocy traconej w odpowiednich elementach tłumiących zredukowanych.

**PRZYKŁAD 1.** Zredukować na wał 1 współczynnika tłumienia  $k_1$



Moc tracona elementu tłumiącego  $k_1$  wynosi

$$N_1 = k_1 (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3)^2 = k_1 (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3')^2.$$

Uwzględniając, że

$$\varphi_{2r} = \frac{\varphi_2}{i_{12}}, \quad \varphi_{3r} = \frac{\varphi_3}{i_{12} i_{23}}, \quad \varphi_2' = \frac{\varphi_3}{i_{23}},$$

otrzyma się

$$k_{1r} \left( \frac{\dot{\varphi}_2}{i_{12}} - \frac{\dot{\varphi}_3}{i_{12} i_{23}} \right)^2 = k_1 \left( \dot{\varphi}_2 - \frac{\dot{\varphi}_3}{i_{23}} \right)^2,$$

$$k_{1r} \left( \frac{\dot{\varphi}_2}{i_{12}} - \frac{\dot{\varphi}_3}{i_{12} i_{23}} \right)^2 = k_1 i_{12}^2 \left( \frac{\dot{\varphi}_2}{i_{12}} - \frac{\dot{\varphi}_3}{i_{12} i_{23}} \right)^2,$$

skąd

$$k_{1r} = k_1 i_{12}^2$$

Warunki redukcji na wał 1 współczynnika tłumienia  $k_3$

$$k_{3r} \dot{\varphi}_{3r}^2 = k_3 \dot{\varphi}_3^2 \Rightarrow k_{3r} = k_3 \left( \frac{\dot{\varphi}_3}{\dot{\varphi}_{3r}} \right)^2 = k_3 (i_{12} i_{23})^2.$$

## Dynamika Maszyn

### Układanie równań ruchu układów mechanicznych

W dynamice układów mechanicznych równania ruchu opisują ruch punktu materialnego, ciała lub mechanizmu pod działaniem sił. Są modelem matematycznym rozwiązania II zadania dynamiki, tzn. pozwalają wyznaczyć parametry ruchu, gdy znane są siły powodujące ruch. Są nazywane dynamicznymi równaniami ruchu, w odróżnieniu od kinematycznych równań ruchu, na podstawie których można wyznaczyć siły powodujące zadany ruch (I zadanie dynamiki). Dynamiczne równania ruchu układów dyskretnych są równaniami różniczkowymi zwyczajnymi 2-go rzędu liniowymi lub nieliniowymi.

**Zasada d'Alemberta.** W czasie ruchu dowolnego układu punktów materialnych (układu mechanicznego sztywnego lub układu sprężysto-tłumiącego) siły rzeczywiste zewnętrzne działające na punkty tego układu (masy skupione) równoważą się z siłami bezwładności, a więc

$$-\sum_{j=1}^N m_j \ddot{a}_j + \sum_{j=1}^N \vec{P}_{ej} = 0 \quad - \text{równanie równowagi sił,}$$

$$-\sum_{j=1}^N \vec{r}_j \times m_j \ddot{a}_j + \sum_{j=1}^N \vec{r}_j \times \vec{P}_{ej} = 0 \quad - \text{równanie równowagi momentów sił.}$$

gdzie:  $\vec{P}_{ej}$  – siły zewnętrzne (czynne i biernie – styczne reakcje więzów),  
 $\vec{r}_i$  – promień wektora położenia punktu materialnego w układzie współrzędnych prostokątnych  $x, y, z$ .

**Równania Lagrange'a II-go rodzaju** wywodzą się z zasady pracy przygotowanej d'Alemberta-Lagrange'a, która w słownym sformułowaniu brzmi: warunkiem niezbędnym i wystarczającym aby układ sił czynnych i biernych (reakcji więzów) oraz sił bezwładności w każdej chwili ruchu czynił zadość warunkom równowagi, jest — aby suma prac przygotowanych wszystkich tych sił przy odpowiadających im przemieszczeniach wirtualnych równała się zero.

Matematyczny zapis tej zasady wyraża się równaniem

$$\sum_{i=1}^n (\vec{P}_i + \vec{R}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i) \delta \vec{r}_i = 0$$

Dla układów o wielu stopniach swobody równania Lagrange'a II-go rodzaju mogą mieć dwojaką postać:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} + \frac{\partial E_p}{\partial q_j} = Q_j - R_j$$

lub

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial E_p}{\partial q_j} = Q_j$$

przy czym  $j = 1, 2, \dots, n$ , co oznacza, że dla układu o  $n$  stopniach swobody liczba równań wynosi  $n$ .

We wzorach powyższych przyjęto oznaczenia:

$E_k$  – energia kinetyczna układu,

$E_p$  – energia potencjalna układu,

$Q_j$  – zewnętrzna siła uogólniona czynna, działająca na kierunku współrzędnej uogólnionej  $q_j$ , zgodnie z dodatnim zwrotem tej współrzędnej,

$R_j$  – uogólniona siła oporu odpowiadająca współrzędnej  $q_j$ , zwrócona przeciwnie do  $Q_j$ ,

$D$  – funkcja dysypacji energii (funkcja Rayleigha).

**Energia kinetyczna ( $E_k$ )** — energia ruchu ciał wchodzących w skład układu mechanicznego.

Energia kinetyczna ciała sztywnego wykonującego ruch postępowy z prędkością  $v$  wynosi:

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2,$$

gdzie:

$m$  – masa ciała,

$v$  – prędkość środka masy ciała.

Energia kinetyczna ciała sztywnego wykonującego ruch obrotowy z prędkością kątową względem jednej z głównych osi bezwładności wynosi:

$$E_k = \frac{1}{2} \Theta \omega^2,$$

gdzie:

$\Theta$  – moment bezwładności ciała względem osi obrotu.

**Twierdzenie Koeniga.** Energia kinetyczna ciała sztywnego równa się sumie energii kinetycznej ruchu postępowego środka masy i energii kinetycznej ruchu obrotowego wokół środka masy ciała.

**Energia potencjalna** (ciała, układu ciał) — część energii mechanicznej (poza energią kinetyczną) związana ze zmianą wymiarów lub postaci ciała w wyniku odkształceń sprężystych, zmianą wzajemnego położenia ciał wchodzących w skład układu bądź oddziaływaniem innych układów lub pól fizycznych (grawitacyjnych, elektrycznych, magnetycznych). Energia potencjalna jest funkcją położenia; jej wartość w danym stanie ciała lub układu równa się pracy zewnętrznej, jaką trzeba wykonać, żeby zmienić położenie od określonego stanu początkowego, w którym przyjmuje się zerowy poziom energii potencjalnej ( $E = 0$ ). Energia potencjalna liniowego elementu sprężystego o sztywności  $c$  wynosi

$$E_p = \frac{1}{2} c (\Delta x)^2$$

gdzie:

$\Delta x$  – wydłużenie (skrócenie) elementu.

**Dyssypacja energii mechanicznej** — zjawisko nieodwracalne powstawania energii cieplnej podczas ruchu układów rzeczywistych w wyniku działania oporów tarcia.

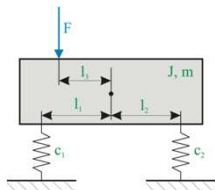
**Funkcja dyssypacji (Rayleigha)** — funkcja intensywności procesu dyssypacji energii, równa połowie energii mechanicznej  $E_D$  rozproszonej w jednostce czasu  $t$

$$D = \frac{1}{2} \frac{dE_D}{dt}.$$

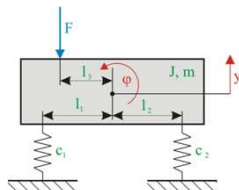
Gdy siły oporów tarcia zależą liniowo od prędkości uogólnionych, funkcja dyssypacji jest jednorodną funkcją kwadratową prędkości uogólnionych

$$D = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n k_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K} \dot{\mathbf{q}}$$

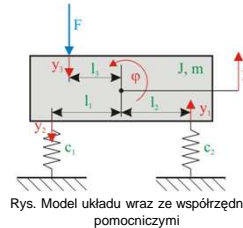
**PRZYKŁAD** Dla modelu przedstawionego na rysunku wyznaczyć równania ruchu.



Rys. Model badanego układu



Rys. Model układu wraz ze współrzędnymi uogólnionymi



Rys. Model układu wraz ze współrzędnymi pomocniczymi

Energia kinetyczna układu

$$E = \frac{1}{2} (J \dot{\phi}^2 + m \dot{y}^2)$$

Energia potencjalna układu

$$V = \frac{1}{2} (c_1 y_1^2 + c_2 y_2^2)$$

Równania więzów

$$y_1 = y - \phi l_1 \quad y_2 = y + \phi l_2$$

Po uwzględnieniu równań więzów energia potencjalna układu wynosi

$$V = \frac{1}{2} [c_1 (y^2 + \phi^2 l_1^2 - 2 y \phi l_1) + c_2 (y^2 + \phi^2 l_2^2 + 2 y \phi l_2)]$$

Dla kolejnych współrzędnych

$$\frac{\partial E}{\partial y} = m \dot{y} \quad ; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{y}} \right) = m \ddot{y}$$

$$\frac{\partial E}{\partial \phi} = J \dot{\phi} \quad ; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{\phi}} \right) = J \ddot{\phi}$$

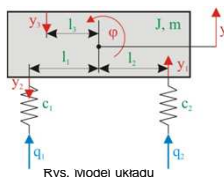
$$\frac{\partial V}{\partial y} = c_1 y - c_1 l_1 \phi + c_2 y + c_2 l_2 \phi$$

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = c_1 l_1^2 \phi - c_1 l_1 y + c_2 l_2^2 \phi + c_2 l_2 y$$

Ostatecznie otrzymano dwa równania różniczkowe

$$\begin{cases} m \ddot{y} + c_1 y - c_1 l_1 \phi + c_2 y + c_2 l_2 \phi = F \\ J \ddot{\phi} + c_1 l_1^2 \phi - c_1 l_1 y + c_2 l_2^2 \phi + c_2 l_2 y = F l_1 \end{cases}$$

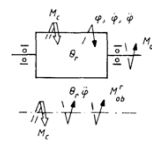
**PRZYKŁAD**



Rys. Model układu

Podczas wyznaczania równań ruchu maszyny, maszynę rzeczywistą zastępuje się modelem (najczęściej złożonym z elementów sztywnych), który otrzymuje się drogą redukcji mas.

**PRZYKŁAD** Rozpatrzmy mechanizm zredukowany do członu obrotowego o momencie bezwładności  $\Theta_r$  (łącznie z wirnikiem silnika), napędzanego momentem czynnym  $M_c$  z prędkością kątową w obciążonego momentem  $M_{ob}$ .



Rys. Model dynamiczny mechanizmu zredukowanego do członu napędzającego obrotowego

Równanie d'Alemberta takiego modelu ma postać

$$\left. \begin{aligned} \theta_r \ddot{\varphi} &= M_c - M'_{ob} \\ \text{lub} \\ \theta_r \frac{d\omega}{dt} &= M_c - M'_{ob} \end{aligned} \right\}$$

przy czym  $\theta_r = \text{const}$ ,  $M_c = \text{const}$  lub  $M_c(\omega)$ , natomiast moment obciążenia może być złożoną funkcją  $M'_{ob}(\varphi, \omega, t)$ .

Równanie Lagrange'a II rodzaju układamy dla ogólnego przypadku, gdy moment bezwładności jest funkcją drogi kątowej  $\varphi$ . Składniki równania Lagrange'a będą następujące

$$E_k = \frac{1}{2} \theta_r(\varphi) \omega^2 = \frac{1}{2} \theta_r(\varphi) \dot{\varphi}^2$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} = \theta_r(\varphi) \dot{\varphi} = \theta_r(\varphi) \omega$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{d\theta_r}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \omega + \theta_r \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\theta_r}{d\varphi} \omega^2 + \theta_r \frac{d\omega}{dt}$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} \frac{d\theta_r}{d\varphi} \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \frac{d\theta_r}{d\varphi} \omega^2$$

Ostatecznie uzyskuje się równanie ruchu

$$\theta_r \frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{2} \omega^2 \frac{d\theta_r}{d\varphi} = M_c - M'_{ob}$$

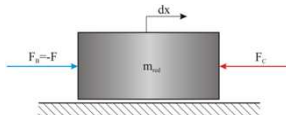
Jeżeli  $\theta_r = \text{const}$ , to równanie to sprowadza się do postaci równania otrzymanego na podstawie zasady d'Alemberta. Jeżeli w równaniu dokonać przekształcenia

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\varphi} (\omega^2)$$

to otrzymamy równanie

$$\frac{1}{2} \theta_r \frac{d}{d\varphi} (\omega^2) + \frac{1}{2} \omega^2 \frac{d\theta_r}{d\varphi} = M_c - M'_{ob}$$

Analogicznie postępuje się, jeżeli maszyna zostanie zredukowana do modelu wykonującej ruch postępowy.



Rys. Model wykonujący ruch prostoliniowy

Różnica pomiędzy zredukowaną siłą czynną a zredukowaną siłą bierną nazywa się zredukowaną siłą resztkową

$$F = F_c - F_b$$

Korzystając z zależności na elementarny przyrost energii, wyprowadza się równanie ruchu maszyny.

$$F_c dx - F_b dx = dE_k, \quad E_k = \frac{m_{red} \dot{x}^2}{2}$$

Wprowadzając wyrażenie na energię kinetyczną do równania ruchu otrzymuje się równanie ruchu maszyny.

$$\left\{ \begin{aligned} F_c - F_b &= \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (m_{red} \dot{x}^2) \\ &\Downarrow \\ F_c - F_b &= m_{red} \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} + \frac{\dot{x}^2}{2} \frac{dm_{red}}{dx} \\ &\Downarrow \\ F_c - F_b &= m_{red} \frac{d\dot{x}}{dt} + \frac{\dot{x}^2}{2} \frac{dm_{red}}{dx} \end{aligned} \right.$$

Stosując równania ruchu maszyny, pomija się opory oraz zakłada występowanie energii kinetycznej.

## Dynamika Maszyn

### Charakterystyki dynamiczne

Zastosowanie transformacji Laplace'a umożliwia przekształcenie równania różniczkowego do równania algebraicznego. Procedura wykorzystująca przekształcenie Laplace'a składa się z następujących etapów:

- równanie różniczkowe w dziedzinie czasu opisuje relację pomiędzy wielkością wejściową a wielkością wyjściową,
- równanie różniczkowe zostaje poddane przekształceniu Laplace'a, stając się równaniem algebraicznym,
- w celu wyznaczenia poszukiwanego równania dla funkcji wyjściowej w postaci operatorowej, stosuje się zwykłe metody algebraiczne,
- otrzymana w taki sposób transformata Laplace'a funkcji na wyjściu, jest następnie poddawana odwrotnemu przekształceniu Laplace'a, otrzymując ostatecznie poszukiwaną funkcję wielkości wyjściowej w dziedzinie czasu.

W celu uproszczenia zapisu oraz ułatwienia przekształceń liniowych równań różniczkowych wprowadza się zapis operatorowy.

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

Rachunek operatorowy, bo tak również nazywane jest przekształcenie Laplace'a umożliwia rozwiązanie równania różniczkowego przy zerowych warunkach początkowych.

Przekształcenie Laplace'a sumy (różnicy) dwóch funkcji jest równe sumie (różnicy) przekształceń Laplace'a.

$$L[y(t) + x(t)] = Y(s) + X(s)$$

Bardzo ważnymi i istotnymi przekształceniami operatorowymi są przekształcenia różniczkowania.

$$\begin{cases} L\left[\frac{dx}{dt}\right] = sX(s) - x(0) \\ L\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] = s^2X(s) - sx(0) - \frac{dx}{dt}(0) \\ L\left[\frac{d^nx}{dt^n}\right] = s^nX(s) - s^{n-1}x(0) - \frac{dx}{dt}(0) - \dots - \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}(0) \end{cases}$$

Przekształcenie Laplace'a dla całkowania

$$L\left[\int_0^t x(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} X(s)$$

Funkcja czasu  $x(t)$  zwykle się nazywa oryginałem. W modelowaniu układów dynamicznych przekształcenie Laplace'a, jest stosowane do przedstawienia w postaci operatorowej charakterystyk dynamicznych opisujących własności liniowych modeli matematycznych. Własności przekształcenia Laplace'a:

- Charakteryzuje w sposób najbardziej zwięzły i jednoznaczny układ. Informuje jednocześnie o strukturze równań dynamicznych układu,
- Umożliwia rozwiązanie równań różniczkowych, drogą algebraicznych przekształceń,
- Umożliwia w prosty sposób wyznaczenie charakterystyki dynamicznej układu na podstawie charakterystyk dynamicznych elementarnych układów.

Iloraz transformaty Laplace'a odpowiedzi układu do transmittancji wymuszenia, przy zerowych warunkach początkowych nazywa się transmittancją operatorową, niekiedy transformatą admittancji, funkcją przejścia.

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{b_1s^m + b_2s^{m-1} + \dots + b_{m-1}s + b_m}{a_1s^n + a_2s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n}$$

W wyniku podstawienia „ $j\omega$ ” za operator Laplace'a „ $s$ ”, otrzymuje się transmittancję widmową nazywaną również charakterystyką dynamiczną. Transmittancja widmowa  $G(j\omega)$  z transmittancją operatorową  $G(s)$  układu dynamicznego jest związana zależnością:

$$G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega}$$

Transmittancję widmową otrzymuje się bezpośrednio z definicji transmittancji operatorowej i transmittancji widmowej po uwzględnieniu, że przekształcenie Fouriera, jest szczególnym przypadkiem  $s = j\omega$  przekształcenia Laplace'a.

$$G(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{Y(j\omega)} = \frac{b_1(j\omega)^m + b_2(j\omega)^{m-1} + \dots + b_{m-1}(j\omega) + b_m}{a_1(j\omega)^n + a_2(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(j\omega) + a_n}$$

Współczynniki wielomianów licznika i mianownika, są zdefiniowanymi poprzez równania różniczkowe.

$$G(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{Y(j\omega)} = \frac{(s - \hat{\omega}_1)(s - \hat{\omega}_2) \dots (s - \hat{\omega}_{m-1})(s - \hat{\omega}_m)}{(s - \omega_1)(s - \omega_2) \dots (s - \omega_{n-1})(s - \omega_n)}$$

Miejsca zerowe wielomianu licznika charakterystyki dynamicznej nazywane są zerami i reprezentują częstotliwości antyrezonansowe, natomiast pierwiastki mianownika nazywa się biegunami i reprezentują częstotliwości rezonansowe.

Transmittancja widmowa układów mechanicznych sprężysto-tłumieniowych określa podatność układu na działanie sił wymuszających okresowo zmiennych w czasie, dlatego nazywa się ją podatnością dynamiczną. Znajomość transmittancji widmowej umożliwia określenie liczbowych charakterystyk drgań modeli, tj. amplitud drgań wymuszonych i częstości własnych.

Transmittancję widmową można rozdzielić na część rzeczywistą i urojoną:

$$G(j\omega) = P(\omega) + jR(\omega)$$

lub zapisać w postaci wykładniczej

$$G(j\omega) = A(\omega)e^{-j\phi(\omega)}$$

Przedstawienie transmittancji widmowej na płaszczyźnie zmiennej zespolonej jest charakterystyką amplitudowo-fazową (charakterystyką Nyquista).

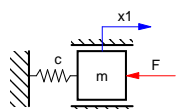
Moduł transmittancji widmowej jest nazywany charakterystyką amplitudowo-częstotliwościową (a-cz) i opisuje rozkład amplitud drgań modelu w funkcji częstotliwości wymuszenia.

$$|G(j\omega)| = A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + R^2(\omega)}$$

Charakterystyka fazowo-częstotliwościowa (f-cz) przedstawia zależność kąta przesunięcia fazowego  $\phi(\omega)$  między sinusoidalnym sygnałem wyjściowym i wejściowym w stanie stacjonarnego wymuszenia, w funkcji częstości w sygnału wymuszającego

$$\phi(\omega) = \arctg\left(\frac{R(\omega)}{P(\omega)}\right)$$

#### PRZYKŁAD



Rys. Model układu drgającego o jednym stopniu swobody

Równanie różniczkowe układu wynosi

$$m\ddot{x}_1 + c \cdot x_1 = F(t)$$

Równanie algebraiczne (po przekształceniu Laplace'a i przyjęciu zerowych wartości początkowych)

$$ms^2 X_1(s) + c \cdot X_1(s) = F(s)$$

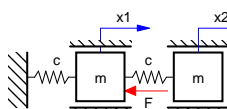
Transmittancja operatorowa układu

$$\frac{X_1(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + c}$$

Transmittancja widmowa układu

$$\frac{X_1(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{1}{-m\omega^2 + c}$$

#### PRZYKŁAD



Rys. Model mechaniczny układu drgającego o dwóch stopniach swobody

Równania różniczkowe układu wynoszą

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + c x_1 + c(x_1 - x_2) = F(t) \\ m\ddot{x}_2 + c(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

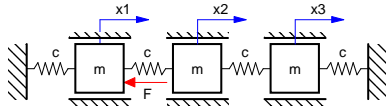
Równanie algebraiczne (po przekształceniach Laplace'a i przyjęciu zerowych wartości początkowych)

$$\begin{cases} (ms^2 + 2c)X_1(s) - cX_2(s) = F(s) \\ (ms^2 + c)X_2(s) - cX_1(s) = 0 \end{cases}$$

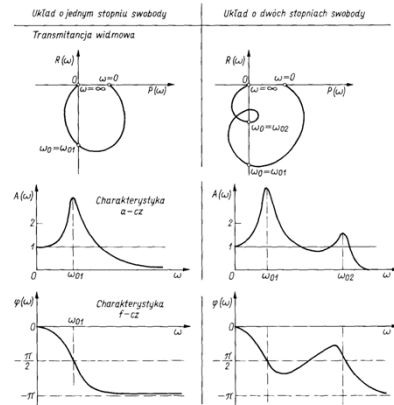
Transmitancje widmowe układu

$$\frac{X_1(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{-m\omega^2 + c}{m^2\omega^4 - 3mc\omega^2 + c^2} \quad \frac{X_2(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{c}{m^2\omega^4 - 3mc\omega^2 + c^2}$$

PRZYKŁAD



Rys. Model mechaniczny układu drgającego o trzech stopniach swobody



Rys. Charakterystyki dynamiczne układów mechanicznych

## Dynamika Maszyn

### Silniki elektryczne

W odniesieniu do napędowych silników elektrycznych stosuje się dwa sposoby wyrażania charakterystyk:

- ilościowa – zawierająca zestaw parametrów urządzenia,
- funkcyjna – wyrażona wzorami matematycznymi, wykresami lub tablicami.

Podstawowe parametry silników elektrycznych obrotowych, ważne z punktu widzenia dynamiki napędu, obejmują następujące wielkości:

- napięcie zasilania znamionowe  $U_n$  [V],
- prąd znamionowy  $I_n$  [A] i maksymalny  $I_{max}$  [A],
- częstotliwość prądu  $f$  [Hz],
- prędkość obrotowa  $n$  [obr/min]
  - znamionowa  $n_n$
  - synchroniczna  $n_0$
  - zakres  $n_{min} \div n_{max}$
  - nominalna przy stałej mocy  $n'$
- moment obrotowy  $M_s$  Nm
  - znamionowy  $M_n$
  - krótkotrwały (szczytowy)  $M_k$
  - rozruchowy  $M_r$
  - znamionowa  $N_n$
  - krótkotrwała  $N_k$
- moc  $N$  [kW]
- dopuszczalna temperatura uzwojeń  $\theta$  [°C],

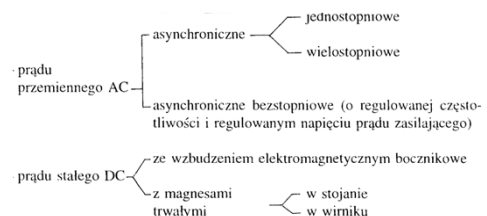
- moment bezwładności  $\theta_s$  [kg · m<sup>2</sup>] wirnika wraz z elementami dodatkowymi,
- dopuszczalna siła obciążenia poprzecznego wału,
- stała czasowa elektryczna  $T_e$  [s] i mechaniczna  $T_m$  [s].

Charakterystyki funkcyjne silników elektrycznych, zamieszczone w katalogach wytwórców najczęściej w postaci wykresów, mogą być następujące:

- charakterystyka mechaniczna silnika, przedstawiająca zależność momentu obrotowego rozwijanego przez silnik, w różnych warunkach pracy, od prędkości obrotowej (lub kątowej),
- charakterystyka wykorzystania mocy napędowej, podająca moc, jaką silnik może rozwijać długotrwale lub w określonych przedziałach czasu (przeciążenia), w zależności od prędkości obrotowej,
- charakterystyka cieplna (dopuszczalna temperatura uzwojeń, czas nagrzewania do temperatury ustalonej),
- charakterystyka sprawności (średni współczynnik sprawności lub zależność sprawności od prędkości obrotowej przy różnym stopniu wykorzystania dysponowanej mocy).

Wielkościami wejściowymi silnika elektrycznego są: napięcie  $U$ , częstotliwość i natężenie prądu  $I$  w uzwojeniach silnika, a wielkościami wyjściowymi — prędkość obrotowa  $n$  (kątowa  $\omega$ ) i moment obrotowy  $M$  (moment elektromagnetyczny) działający na wirnik. Napięcie i częstotliwość prądu wpływają bezpośrednio na prędkość obrotową, a natężenie prądu — na moment obrotowy.

### Rodzaje silników elektrycznych w napędach maszyn.



Silniki asynchroniczne trójfazowe z wirnikiem klatkowym, jednostopniowe (jednobiegiowe). Charakterystykę mechaniczną silnika wyprowadza się z następującego uproszczonego modelu:

$$\begin{aligned} \text{Moc wirującego pola magnetycznego} \quad N_\phi &= M_s \omega_0 \\ \text{Moc przenoszona na wirnik} \quad N &= M_s \omega \\ \text{Straty mocy w uzwojeniu wirnika} \quad \Delta N &= 3 R_w I_w^2 \end{aligned}$$

gdzie:  $\omega_0 = 2\pi f$  — prędkość kątowna wirującego pola magnetycznego,  
 $\omega$  — prędkość kątowna wirnika,  
 $R_w$  — rezystancja w obwodzie wirnika,  
 $I_w$  — prąd w wirniku (wartość skuteczna).

Z bilansu mocy

$$M_s \omega_0 - 3 R_w I_w^2 = M_s \omega$$

wynika

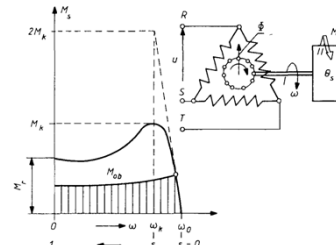
$$M_s = \frac{3 R_w I_w^2}{\omega_0 - \omega} = \frac{3 R_w I_w^2}{s \omega_0}$$

gdzie:  $s = (\omega_0 - \omega)/\omega$  — poślizg wirnika względem wirującego pola magnetycznego.

Ścisłą zależność, uwzględniającą zjawiska indukcyjne, opisuje wzór Klossa:

$$M_s = \frac{2 M_k}{\frac{s_k}{s} + \frac{s}{s_k}}$$

Wykres na rysunku przedstawia charakterystykę mechaniczną silnika dla danego napięcia zasilania (zwykle znamionowego).



Rys. Charakterystyka mechaniczna silnika trójfazowego prądu przemiennego  
 $M_k$  — moment krytyczny (przebiegowy),  $s_k$  — poślizg krytyczny

Na stabilnej (z prawej strony  $s_k$ ) części charakterystyki, przy małych poślizgach wzór Klossa upraszcza się do postaci:

$$M_s = \frac{2 M_k s}{s_k}$$

co oznacza, że w przedziale prędkości bliskich  $\omega_0$  charakterystyka silnika asynchronicznego jest prędkościowo dość sztywna i zbliżona do linii prostej. W stanach nieustalonych, np. przy rozruchu, wirnik silnika jest przyspieszany momentem

$$M = M_s(\omega) - M_{ob}$$

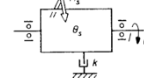
Popularność silników asynchronicznych spowodowana jest następującymi zaletami:

- Dostępności sieci, która eliminuje potrzebę stosowania specjalnych zasilaczy,
- Bezpośredniego dostarczenia prądu do silnika bez konieczności korzystania z komutatorów, w rezultacie nie ma w silniku prądu przemiennego elementów zużywających się mechanicznie w skutek tarcia poza łożyskami,
- Małych gabarytów,
- Niezawodności działania,
- Dostępności na rynku, przy stosunkowo niskiej cenie,
- Dużej przeciążalności.

**Stała czasowa**, w odniesieniu do wirnika silnika traktowanego jako człon inercyjny, charakteryzuje czas narastania prędkości kątownej wirnika po skokowym zadziałaniu momentu elektromagnetycznego  $M_s = \text{const}$ .

Jeżeli wirnik silnika jest poddany działaniu oporów tłumienia o współczynniku  $k$ , to równanie ruchu wirnika będzie następujące

$$\theta_s \frac{d\omega}{dt} + k\omega = M_s$$



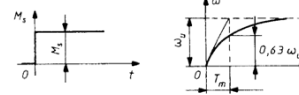
Rys. Model silnika

Rozwiązaniem tego równania przy warunku początkowym  $\omega(t=0) = 0$  jest funkcja wykładnicza

$$\omega(t) = \frac{M_s}{k} \left( 1 - e^{-\frac{k}{\theta_s} t} \right) = \omega_u \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_m}} \right)$$

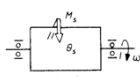
gdzie:  $\omega_u = M_s/k$  — prędkość kątowna w ruchu ustalonym,

$$T_m = \frac{\theta_s}{k} \quad \text{— stała czasowa mechaniczna (bezwładnościowa).}$$



Rys. Stałe czasowe układu mechanicznego silnika przy występowaniu oporów tłumienia

Jeśli w silniku nie występują opory tłumienia, to równanie ruchu upraszcza się do postaci



Rys. Model silnika

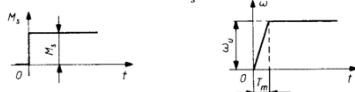
$$\theta_s \frac{d\omega}{dt} = M_s$$

skąd dla warunków początkowych otrzymuje się rozwiązanie

$$\omega(t) = \frac{M_s}{\theta_s} t$$

Stalą czasową jest wtedy czas, po upływie którego wirnik silnika osiągnie prędkość kątowną ruchu ustalonego

$$T_m = \frac{\theta_s \omega_u}{M_s}$$



Rys. Stałe czasowe układu mechanicznego silnika bez oporów tłumienia

W katalogach silników stalą czasową odnosi się do prędkości kątownej  $\omega_{\text{max}}$  i do momentu  $M_{\text{max}}$  w postaci

$$T_m = \frac{\omega_{\text{max}}}{M_{\text{max}}} \theta_s$$

Procesy przejściowe w obwodach elektrycznych silnika, po skokowym przyłożeniu napięcia  $U$ , charakteryzuje stała czasowa elektryczna

$$T_e = \frac{L}{R} = \frac{L_s + L_r}{R_s + R_r}$$

gdzie:  $L_s, L_r$  — indukcyjność obwodu stojana i twornika [H],

$R_s, R_r$  — rezystancja obwodu stojana i twornika [Ω].

Łączna stała czasowa silnika

$$T = T_e + T_m$$

Mechaniczna stała czasowa silnika z dołączonymi masami napędzającymi (stała czasowa układu mechanicznego)

$$T_u = \frac{\omega_{\text{max}}}{M_{\text{max}}} (\theta_s + \theta'_n)$$

gdzie:  $\theta'_n$  — zredukowany na wał silnika moment bezwładności mas napędzanych przez silnik.

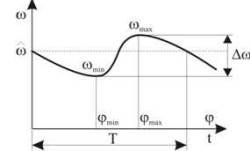
## Dynamika Maszyn

### Nierównomierność biegu maszyny

Na skutek zmiennego charakteru sił czynnych oraz biernych maszyny, które uzależnione są kinematycznymi właściwościami układu napędowego, moment napędowy silnika przebiega w sposób pulsacyjny nawet podczas ruchu ustalonego. Zmiany te są spowodowane przede wszystkim zmiennością resztkowego momentu oraz zredukowanego momentu bezwładności w przypadku układów wykonujących ruch obrotowy. Miara tej zmienności jest nierównomierność biegu maszyny:

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\bar{\omega}}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2}$$

Badanie nierównomierności biegu maszyny ogranicza się do ruchu ustalonego, w wyniku czego rezygnuje się ze szczegółowego rozwiązywania równań ruchu. Badania ogranicza się jedynie do określenia zależności prędkości obrotowej. Postępuje się tak, w przypadku, gdy człony maszyny traktuje się jako ciała idealnie sztywne.

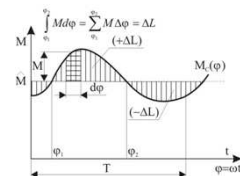


Rys. Przebieg prędkości obrotowej maszyny podczas niejednorodnego biegu

Wartości współczynników nierównomierności biegu maszyny  $\delta$  zależą od wymagań stawianych maszyną. W wielu układach mechanicznych i elektromechanicznych stosuje się zalecenia, ustalone na drodze doświadczalnej. W tablicy zamieszczono wartości współczynników nierównomierności biegu przykładowych maszyn.

Maszyna	Współczynnik nierównomierności biegu $\delta$
Pompy	$\frac{1}{5} \div \frac{1}{50}$
Obrabiarki	$\frac{1}{5} \div \frac{1}{50}$
Silniki okrętowe	$\frac{1}{20} \div \frac{1}{150}$
Silniki spalinowe	$\frac{1}{80} \div \frac{1}{150}$
Sprężarki	$\frac{1}{50} \div \frac{1}{100}$
Generatory prądu	$\frac{1}{100} \div \frac{1}{300}$

Nadwyżka chwilowego momentu obrotowego ponad jego wartość średnią, równą momentowi napędowemu, powoduje przyspieszanie silnika, natomiast niedobór momentu napędowego powoduje przyhamowanie silnika.



Rys. Przebieg zmienności momentu napędowego

Wywołaną w ten sposób nierównomierność biegu maszyny niweluje się stosując koła zamachowe, które gromadzą energię kinetyczną w chwili nadwyżki momentu napędowego i oddają ją w momencie niedoboru. Dołączając do układu napędowego koło zamachowe, zakłada się stałość jego masowego momentu bezwładności.

Bilans energetyczny określający pracę, która ma być akumulowana, przyjmuje postać, którą otrzymuje się w wyniku scałkowania równań ruchu maszyny.

$$\Delta L = \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} M d\varphi = \frac{1}{2} (J_{KZ} + J_{red}) (\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2)$$

Uwzględniając zależność nierównomierności biegu maszyny otrzymuje się ostatecznie

$$\Delta L = (J_{KZ} + J_{red}) \bar{\omega}^2 \delta$$